Zdolni z Pomorza

ODN SŁUPSK

POMORSKA LIGA ZADANIOWA *ZDOLNI Z POMORZA*

Konkurs dla uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych województwa pomorskiego w roku szkolnym 2021/2022

Etap II – powiatowy

Przedmiot: MATEMATYKA

Instrukcja dla ucznia

Zanim przystąpisz do rozwiązywania testu, przeczytaj uważnie poniższą instrukcję.

1. Arkusz testowy zawiera **5** zadań.
2. Za zadania z arkusza można uzyskać łącznie 50 punktów.
3. Rozwiązania zadań przedstaw w takiej formie, żeby można było odczytać je bez problemu.
4. Wszystkie rozwiązania zadań zamieść w jednym pliku o nazwie imię_nazwisko_miejscowość (w formacie *.doc, *.docx, *.pdf) i prześlij na adres mailowy: matematyka_plz_Pp@odn.slupsk.pl.

   Dopuszczalny jest odręczny zapis rozwiązań. Pisz wtedy czytelnie. Rozwiązania zapisane odręcznie, należy zeskanować do jednego pliku i zapisać w formacie pdf. Pliki w postaci zdjęć należy wkleić do pliku tekstowego (w formacie *.doc, *.docx).

Życzymy powodzenia!

Zadanie 1. (0-10 p.)

a) Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, Wykres tej funkcji przecina oś odciętych w punkcie 1. Do wykresu funkcji należą punkty K(4;-3) i L(-1;12). Wyznacz wzór tej funkcji.

b) Poprowadzono prostą $y = px + t$ przechodzącą przez punkt (2;3) oraz prostą do niej prostopadłą, przechodzącą przez punkt (2;1). Proste te przecinają parabolę (wykres funkcji, wymienionej w punkcie a). Wiedząc, że p jest liczbą wymierną, spełniającą równanie $p + \frac{33}{2(1+2\sqrt{3})} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{16 - 8\sqrt{3}}$, wykaż, że pole wielokąta, wyznaczonego przez punkty przecięcia prostych z wykresem funkcji kwadratowej, jest nie większe niż 30 j.kw.

Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.

Zadanie 2. (0-10 p.)

Sześcian, którego ściany zostały pomalowane zieloną farbą, dzielimy na 64 identycznej wielkości sześcianiki.

a) Losujemy 3 sześcianiki spośród nich. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że łączna liczba zielonych ścian wylosowanych sześcianików wynosi 4. Oblicz także, jakie byłoby prawdopodobieństwo podobnego losowania 3 sześcianików spośród wszystkich, gdyby w dużym sześcianie 2 przeciwległe ściany nie były pomalowane, a pozostałe 4 były pomalowane.

b) Losujemy 2 sześcianiki spośród wyżej wymienionego sześcianu. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowane sześcianiki mają wspólną ścianę.

Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.

Zadanie 3. (0-10 p.)

a) Dany jest graniastosłup trójkątny ukośny, którego pole podstawy jest równe S, a krawędź boczna k jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Poprowadzono 3 płaszczyzny równoległe do krawędzi bocznych tego graniastosłupa, odcinając w ten sposób jego naroża. Płaszczyzny te dzielą każdy z boków podstaw graniastosłupa na 3 odcinki w stosunku $t : u : t$ (gdzie t, u są liczbami całkowitymi). Wyznacz stosunek objętości otrzymanego graniastosłupa sześciokątnego, powstałego po odcięciu jego części, do objętości graniastosłupa ukośnego trójkątnego.

b) Oblicz objętość nowej bryły, jeżeli wiadomo, że:

$t = 2 \cdot log_3\sqrt{3} \cdot \frac{(8)^{\frac{2}{3}}}{2^{11}:8^3}$

$u = 2\sqrt{3} \cdot sin\frac{\pi}{3} - tg\frac{\pi}{4}$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.

Zadanie 4. (0-10 p.)

a) Dla jakich wartości parametru $\propto \in \langle 0; 2\pi \rangle$ rozwiązaniem poniższego układu równań jest para liczb ujemnych?

$$\begin{cases} (\sin\propto -1)x + y = 1 \\ (-2\sin\propto)x + (2sin\propto +1)y = sin\propto \end{cases}$$

b) Dany jest punkt $A\left(\sqrt{2}+1; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$, który leży na prostej $y = ax + 1$. Punkt A jest wierzchołkiem kwadratu ABCD, którego punkty A i C leżą na tej prostej. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego kwadratu, jeżeli wiadomo, że przekątna tego kwadratu jest równa $4\sqrt{2}$.

Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.

Zadanie 5. (0-10 p.)

a) Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości *x*. Przez każdy z wierzchołków trójkąta poprowadzono proste równoległe do siebie. Prosta przechodząca przez wierzchołek A tworzy z bokiem trójkąta kąt α. Odległości między prostymi równoległymi są równe odpowiednio a i b. Wyznacz długość boku tego trójkąta – uzależnij je od wielkości a i b.

b) Na trójkącie tym opisano okrąg. Oblicz pole tego trójkąta oraz pole koła ograniczonego tym okręgiem.

Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.