Jerzy Paczkowski

Matematyka – konkurs w czasie pandemii

To już piąta edycja Pomorskiej Ligi Zadaniowej *Zdolni z Pomorza* – pomimo długotrwałej nauki zdalnej w szkołach, w związku z trwającą pandemią, tym razem przebiegała w atmosferze bardziej spokojnej, bo uczniowie, nauczyciele i organizatorzy konkursu oswoili się z panującą sytuacją i skorzystali z doświadczeń minionego roku szkolnego. Tegoroczna edycja PLZ *Zdolni z Pomorza* przeprowadzona została na wszystkich etapach – od szkolnego po wojewódzki. Jeszcze udało się przeprowadzić szkolny etap kwalifikacyjny w formie stacjonarnej, ale pozostałe etapy miały formę online.

Tak więc do etapu powiatowego zakwalifikowano około 7 % uczniów szkół podstawowych (SP), rozwiązujących zadania z matematyki na etapie szkolnym (kwalifikacyjnym) i około 10 % uczniów szkół ponadpodstawowych/ponadgimnazjalnych (Pp/Pg). Jednak tylko nieco ponad 45% uczniów, zakwalifikowanych do etapu powiatowego, nadesłało rozwiązania zadań z tego etapu. Na etapie wojewódzkim już było lepiej (87 %) – prawie wszyscy uczniowie zakwalifikowani do tego etapu wzięli udział w konkursie online (Tabela 1).

Tabela 1. Uczestnicy konkursu PLZ *Zdolni z Pomorza* 2020/2021 z matematyki

	Etap szkolny	Etapu powiatowy*)	Etapu wojewódzki*)	Etap wojewódzki Nadesłane zadanie dodatkowe
Szkoły podstawowe	1936	63 (na 141)	36 (na 41)	30
Szkoły ponadpodstawowe i ponadgimnazjalne	1152	51 (na 111)	29 (na 36)	16

*) wyjaśnienie, np.: Zapis 63 (na 141) informuje, że do etapu powiatowego zakwalifikowano 141 uczniów, a rozwiązania zadań z tego etapu nadesłało 63 uczniów.

Na szczególną uwagę zasługuje fakt, że na etapie powiatowym i wojewódzkim uczniowie nadsyłali prace, w których przedstawiali rozwiązania np. tylko kilku zadań z 5 opublikowanych na stronie internetowej konkursu – fakt ten świadczy o tym, że uczniowie chcieli samodzielnie sprawdzić się ze swoich umiejętności matematycznych.

Przynajmniej połowa zadań matematycznych w tegorocznej edycji PLZ *Zdolni z Pomorza* miała konstrukcję dwuczęściową – wyniki pierwszej części zadania należało wykorzystać do rozwiązania części drugiej, trudniejszej, która wymagała od uczniów bardziej kreatywnego podejścia.

PLZ *Zdolni z Pomorza* mają zachęcać uczniów do zainteresowania się zagadnieniami związanymi m.in. z matematyką (z innymi obszarami wiedzy również). Właśnie na etapie powiatowym (online) uczniowie nie byli ograniczeni czasem (choć był ściśle wyznaczony termin nadesłania pracy) i mogli wielokrotnie „przyjrzeć się" zadaniom, oswoić się z nimi, podejmować kolejne próby rozwiązania, poszerzać swoją wiedzę matematyczną, wspierając się przy tym dodatkowymi informacjami z danej dziedziny matematycznej (z podręczników, z internetu, od nauczyciela). Ten etap pracy samodzielnej w pewnym sensie miał charakter twórczy,

Kłopoty z zadaniami „na rozgrzewkę" na etapie szkolnym

Zadania „na rozgrzewkę" nie powinny sprawiać kłopotów. Jednakże kilka z nich dla wielu uczniów okazały się być trudnymi. Można jedynie domyślać się, które to mogły być zadania. Oczywiście jest to wyłącznie subiektywne odczucie autora zadań.

Zadanie 3 (SP – etap kwalifikacyjny/szkolny)
W lutym 2020 roku najstarszy z braci – Adam i najmłodszy – Hubert mieli urodziny. Dwie ostatnie cyfry w roku urodzenia Adama tworzą liczbę 3 razy mniejszą od liczby, jaką tworzą dwie ostatnie cyfry w roku urodzenia Huberta. Ile lat mają Adam i Hubert oraz średni z braci, Bartek, jeżeli wiadomo, że w roku 2020 mieli wszyscy trzej razem 37 lat?

Na czym polegała trudność w tym zadaniu?

Należało zauważyć, że skoro trzej bracia mieli łącznie 37 lat, to najprawdopodobniej wszyscy urodzili się w XXI wieku. Wnioskować to można było z informacji o ostatnich cyfrach w latach urodzenia Adama i Huberta, czyli że $3x = t$. To sugerowało, że skoro miała być spełniona ta zależność, to Adam nie mógł urodzić się w XX wieku. Bracia urodzili się: Adam w roku $2000+x$, Bartek w roku $2000+y$, Hubert w roku $2000+t$. Kolejnym krokiem było powiązanie roku urodzenia z wiekiem w 2020 roku – Adam miał więc $2020 – (2000+x)$ lat, Bartek miał $2020 – (2000+y)$ lat, a Hubert $2020 – (2000+t)$ lat. Wszyscy trzej bracia mieli łącznie 37 lat. Rozwiązanie zadania prowadziło do równania liniowego z dwiema niewiadomymi, z którego wynikało, że wiek Bartka to $y = 4x–3$. Należało rozpisać to w odpowiedniej tabeli, a następnie rozpatrzeć możliwe przypadki i w konsekwencji wywnioskować, że Adam ma 16 lat, Bartek – 13 lat, a Hubert – 8 lat.

Zadanie 2 (Pp/Pg – etap kwalifikacyjny/szkolny)
W skarbcu królewskim było k monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucał o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbca król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę k, dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości k oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.

Najszybciej i najłatwiej można było obliczyć, ile monet dorzucano do skarbca królewskiego w ciągu np. n dni, wykorzystując wzór na sumę ciągu arytmetycznego. To pozwalało na wyznaczenie wzorem liczby monet w skarbcu n-tego dnia: $M(n) = n^2 - 26n + k$. Na podstawie własności funkcji kwadratowej można było stwierdzić, że najmniejsza liczba monet w skarbcu była 13-go dnia. To była ta najłatwiejsza część zadania, z którą zmierzyli się uczniowie – czyli policzenie, ile monet trafiało do skarbca w ciągu n dni. Dalsze rozważania, którego dnia było najmniej monet w skarbcu oraz dotyczące tego, że w początkowej fazie w skarbcu musiała być jednak dostateczna liczba monet, aby – przy określonych dziennych „dochodach" do skarbca – król mógł wybierać 50 monet każdego dnia, były już bardziej skomplikowane i wymagały mało szkolnego spojrzenia na zagadnienie.

Zadania na etapie powiatowym

Nadesłane rozwiązania zadań na etap powiatowy można już analizować zarówno pod kątem stopnia trudności, oryginalnych rozwiązań, czy też popełnianych błędów w rozumowaniu. Tabela 2 pokazuje, które z zadań były łatwiejsze, a których zadań nie wszyscy uczniowie podjęli się rozwiązywać.

Tabela 2. Dane dotyczące uczniów ze szkół podstawowych oraz ze szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych [PLZ 2020/2021 – etap powiatowy]

	Zadanie 1	Zadanie 2	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5
Szkoła Podstawowa (klasy 7 i 8) Piszących na etapie powiatowym – 63 uczniów	6*) 0,66**) 0,73***)	2*) 0,73**) 0,75***)	16*) 0,49**) 0,66***)	15 *) 0,41**) 0,54***)	21*) 0,39**) 0,59***)
Szkoła ponadpodstawowa i ponadgimnazjalna Piszących na etapie powiatowym – 51 uczniów	0*) 0,86**) 0,86***)	13*) 0,54**) 0,72***)	10*) 0,62**) 0,78***)	9*) 0,32**) 0,39***)	13*) 0,54**) 0,73***)

*) – liczba uczniów, którzy nie podjęli się rozwiązywania tego zadania
**) – wskaźnik łatwości zadania w odniesieniu do wszystkich piszących
***) – wskaźnik łatwości zadania tylko w odniesieniu do uczniów, którzy podjęli się rozwiazywania tego zadania

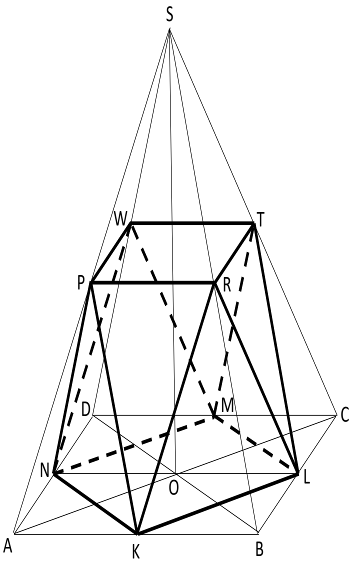
Wśród zadań na etapie powiatowym jako trudne okazały się następujące zadania:

- dla uczniów szkół podstawowych – zadanie 5 (wskaźnik łatwości 0,39), zadanie 4 (wskaźnik łatwości 0,41) i zadanie 3 (wskaźnik łatwości 0,49);
- dla uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych – zadanie 4 (wskaźnik łatwości 0,32) i ewentualnie zadanie 2 lub 5 (wskaźnik łatwości 0,54).

Nie sposób przytoczyć przykładowych rozwiązań zadań, choćby ze względu na różnorodność tych rozwiązań, różne strategie w podejściu do zadania, jak i pomysłowość uczniów w „rozgryzaniu" problemu. Dlatego ograniczę się do wybranych zadań i do komentarza.

Zadanie 5 (SP – etap powiatowy)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym przekrój płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i przekątną podstawy jest trójkątem równobocznym o polu równym. Przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka poprowadzono płaszczyzny, odcinając w ten sposób części bryły. Oblicz stosunek objętości otrzymanej bryły do objętości całego ostrosłupa oraz oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły.



Zdawałoby się, że już wiele było zadań podobnych, z odcinaniem części brył i że to zadanie powinno być łatwe w rozwiązywaniu. Pułapkę dla sporej części uczniów stanowił zapis pola przekroju –$a^2\sqrt{3}$. Zwłaszcza, gdy uczniowie wykorzystywali wzór na pole trójkąta równobocznego –$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. W pierwszym przypadku *a* jest pewną miarą (wartością), w drugim jest symbolem oznaczającym bok trójkąta równobocznego. Należało inaczej zapisać wzór na pole trójkąta: $P = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$. Wtedy otrzymujemy, że długość boku przekroju (trójkąta równobocznego) jest równa $2a$. Dalej powinno było pójść łatwiej, jeśli uczeń w wykorzystywanych wzorach pamiętał o zmianie symbolu *a* na np. *x*.

Z obliczeniem stosunku objętości poobcinanej bryły do objętości ostrosłupa nie powinno było być problemu, jeśli wykorzystano by informację o skali podobieństwa dla objętości brył. Wtedy widać, że odcięty „czubek" z wierzchołkiem ostrosłupa stanowił 1/8 objętości ostrosłupa. Z kolei 4 odcinane części przy wierzchołkach podstawy były jednakowe i każda z nich stanowiła połowę wspomnianego wcześniej „czubka" czyli 1/16 objętości ostrosłupa. A wtedy już bardzo łatwo było wykazać, że stosunek objętości poobcinanej bryły do objętości ostrosłupa był równy 5/8. Niewielu uczniów podjęło się podobnego rozumowania.

Natomiast z obliczeniem pola powierzchni poobcinanej bryły mogły być problemy, gdyż w tym przypadku potrzeba było trochę wyobraźni, aby zauważyć, które ściany tej bryły były trójkątami równobocznymi, a które równoramiennymi. Następnie należało wyliczyć długości boków 4 trójkątów równobocznych, 4 trójkątów równoramiennych i 2 kwadratów, a następnie policzyć odpowiednie pola i je do siebie dodać.

Zadanie 4 (SP – etap powiatowy)

W każdy trójkąt wyznaczony przez przekątną kwadratu i dwa boki tego kwadratu wpisujemy okrąg. Środki tych okręgów są wierzchołkami nowego kwadratu. Dla tego nowego kwadratu wykonujemy analogiczną konstrukcję. Czynność tę powtarzamy do czasu, gdy uzyskamy po raz pierwszy kwadrat, którego pole będzie mniejsze niż 1 % pola wyjściowego kwadratu. Ile razy wykonamy tę konstrukcję?

Zadanie to wymagało od uczniów wiadomości i umiejętności wykraczających poza podstawę programową. Uczeń musiał dość swobodnie poruszać się w zakresie działań na pierwiastkach, radzić sobie z usuwaniem niewymierności z mianownika ułamka, bo to ułatwiało obliczenia. Niektórzy uczniowie próbowali ratować się przybliżeniami. Tu jednak pojawiała się pułapka – zbyt „grube” przybliżenie podnoszone do kolejnych potęg powodowało, że ich wynik mógł odbiegać od wyniku dokładnego. Inni uczniowie jeszcze nieświadomie tworzyli/używali metody ciągu geometrycznego, niejako „odkrywając” go na potrzeby zadania.

Zadanie 4 (Pp/Pg – etap powiatowy)

a) Liczby a_1, a_2, a_3 ...., a_n są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znając sumy

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ oraz $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$

oblicz iloczyn $I = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$. Wynik uzależnij od S, T i n.

Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.

b) Przeprowadź dyskusję, czy ustalona zależność jest prawdziwa dla dowolnego ciągu geometrycznego (a_n) i dowolnej liczby n wyrazów. Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.

O ile pierwsza część tego zadania nie sprawiła uczniom zbyt wiele trudności, o tyle już druga część zazwyczaj miała niekompletne rozwiązanie, nie wyczerpywała wszystkich możliwości. Wyrażenia zapisane po lewej i prawej stronie zależności były identyczne co do wartości bezwzględnej. Należało jednak doprecyzować, kiedy wartość bezwzględną można pominąć. Najlepszym sposobem przeprowadzenia dyskusji prawdziwości ustalonej zależności było zastosowanie metody analogicznej do metody zero-jedynkowej, jak przy dowodzeniu tautologii rachunku zdań, czyli rozpisać to w odpowiedniej tabeli, tyle tylko, że w tym przypadku należało uwzględnić znaki +/- dla a_1, q i parzystość n.

Zadania na etapie wojewódzkim

Pomimo tego, że etap wojewódzki konkursu przeprowadzony został w formie on-line, uczniowie byli ograniczeni czasem na rozwiązanie zadań konkursowych (90 minut). Ten etap można określić jako decydujący. Porównanie wyników uczniów z etapu powiatowego i wojewódzkiego może pokazywać, w jakim stopniu nastąpił rozwój uczniów.

Tabela 3 pokazuje, które z zadań były łatwiejsze, a których zadań nie wszyscy uczniowie podjęli się rozwiązywać.

Tabela 3. Dane dotyczące uczniów ze szkół podstawowych oraz ze szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych [PLZ 2020/2021 – etap wojewódzki]

	Zadanie 1	Zadanie 2	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5
Szkoła Podstawowa (klasy 7 i 8) Piszących na etapie wojewódzkim – 36 uczniów	1*) 0,87**) 0,91***)	9*) 0,23**) 0,31***)	12*) 0,31**) 0,46***)	6 *) 0,66**) 0,79***)	10*) 0,29**) 0,40***)
Szkoła ponadpodstawowa i ponadgimnazjalna Piszących na etapie wojewódzkim – 51	6*) 0,41**) 0,52***)	7*) 0,48**) 0,63***)	10*) 0,27**) 0,41***)	10*) 0,17**) 0,25***)	2*) 0,29**) 0,31***)

*) – liczba uczniów, którzy nie podjęli się rozwiązywania tego zadania

**) – wskaźnik łatwości zadania w odniesieniu do wszystkich piszących

***) – wskaźnik łatwości zadania tylko w odniesieniu do uczniów, którzy podjęli się rozwiazywania tego zadania

Zgodnie z oczekiwaniami, wyniki, jakie uzyskali uczniowie szkół podstawowych za zadanie 1, są wysokie. Taki też był cel pomysłu na zadanie tego typu – praktyczne, o kupowaniu na targu jabłek i gruszek, których ceny ulegały zmianie. Zadanie to wymagało ułożenia układu równań, chociaż niekoniecznie. Wielu uczniów wykorzystało metodę rozwiązywania zadań, jaką stosuje się w klasach młodszych. Np. „za 4 kg jabłek i 2 kg gruszek zapłacono 38 złotych, innego dnia za 3 kg gruszek i 2 kg jabłek zapłacono 33 złote” – w tak sformułowanym zadaniu od razu zauważamy, że 1 kg jabłek kosztował 5 złotych. A dalej już było tylko łatwiej. Wielu uczniów zauważyło, że w taki sposób można rozwiązać zadania. W zapisach zależności uczniowie niekoniecznie stosowali jako zmienne tradycyjne „x” i „y”. Jako zmienne pojawiały się pierwsze literki owoców: „J_I, J_{II}, G”, albo komentarz słowny, wyjaśniający zależność między cenami za kilogram jabłek I i II gatunku oraz gruszek.

Wśród zadań na etapie wojewódzkim jako trudne okazały się następujące zadania:

- dla uczniów szkół podstawowych – zadanie 2 (wskaźnik łatwości 0,23), zadanie 5 (wskaźnik łatwości 0,29) i zadanie 3 (wskaźnik łatwości 0,31);
- dla uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych – zadanie 4 (wskaźnik łatwości 0,17), zadanie 3 (wskaźnik łatwości 0,27) i zadanie 5 (wskaźnik łatwości 0,29).

Zadanie 2 (SP – etap wojewódzki)

W prostokątnym układzie współrzędnych dany jest równoległobok ABCD, w którym:

- znane są współrzędne wierzchołka A(12; – 2),
- środkiem boku BC jest punkt K(4; 3),
- współrzędne wierzchołka B(x; y) są liczbami całkowitymi dodatnimi i spełniają równość $(x – y)(5 + 2y) = 26$.

Przez punkt K poprowadzono prostą prostopadłą do boku BC, która przecięła jeden z boków równoległoboku.

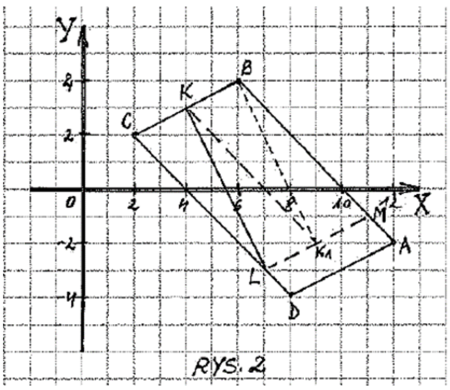
a) Wyznacz współrzędne wierzchołków B, C i D i oblicz pole równoległoboku ABCD.

b) Jaką część pola równoległoboku ABCD stanowi większa jego część, odcięta przez prostopadłą do boku BC, w punkcie K?

Zapisz swój tok rozumowania i obliczenia.

Wydawało się, że to zadanie – w swej idei bardziej praktyczne – nie powinno być trudnym do rozwiązania. Zwłaszcza pierwsza część zadania nie powinna była sprawić kłopotów. Do rozstrzygnięcia były jakby dwa istotne problemy – rozwiązać możliwie najprościej równanie z dwiema niewiadomymi i przedstawić graficznie równoległobok w kratowym układzie współrzędnych, aby odnaleźć współrzędne jego wierzchołków. W jednym i drugim przypadku uczniowie nie ustrzegli się błędów lub niedopatrzeń. W analizie równania należało zauważyć, że wartość drugiego nawiasu jest zawsze dodatnia, tak więc i wartość pierwszego nawiasu powinna być dodatnia. Wtedy liczbę 26 należało rozpatrywać jako iloczyn 1 i 26, 2 i 13, 13 i 2 oraz 26 i 1, przy czym 2 ostatnie przypadki należało odrzucić, ze względu na zapis w drugim nawiasie.

Druga część zadania możliwa była do rozwiązania „na piechotę", pod warunkiem, że uczniowie starannie i dokładnie wyznaczyli wierzchołki równoległoboku i poprowadzili prostopadłą do boku BC w punkcie K. Można było „po kratkach" układu współrzędnych policzyć długości odpowiednich boków czy pola figur.



Rysunek z modelu rozwiązań.

W rozwiązaniach tej części zadania uczniowie najchętniej obliczali pole odciętego trójkąta CKL, wyznaczając długości jednego z boków i odpowiedniej wysokości lub długości dwóch boków (jeśli wykorzystali fakt, że trójkąt CKL jest prostokątny). A następnie obliczali pole pozostałej części równoległoboku. Rzadko który z uczniów zauważył, że analizowana figura to trapez LMBK z dołączonym paskiem równoległoboku DAML, że trójkąt CKL stanowi 1/4 „okrojonej" figury LMBK, a sam pasek DAML stanowi 1/6 równoległoboku ABCD. Bez obliczania pola figur można było wykazać, że pole wielokąta KBADL stanowi 19/24 pola równoległoboku ABCD.

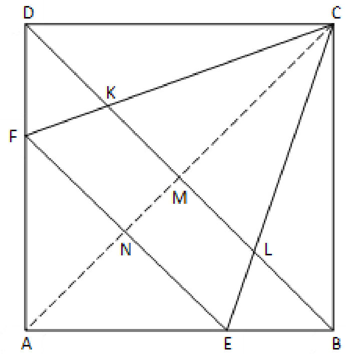
Zadanie 5 (SP – etap wojewódzki)

Dany jest kwadrat ABCD o boku równym a. Na bokach kwadratu AD i AB obrano odpowiednio punkty F i E tak, że $|AF| = \frac{2}{3}|AD|$ i $|AE| = \frac{2}{3}|AB|$. Punkty E i F połączono z punktem C, a następnie poprowadzono przekątną BD, która przecięła odcinki CF i CE odpowiednio w punktach K i L. W ten sposób otrzymaliśmy figurę EFKL.

a. Wykaż, że pole figury EFKL jest większe od 1/6 pola kwadratu ABCD, ale mniejsze od 1/4 pola tego kwadratu.

b. Wykaż, że obwód figury EFKL jest mniejszy od sumy długości dwóch przekątnych kwadratu ABCD.

Zapisz swój tok rozumowania i obliczenia.



Zadanie wygląda pozornie na skomplikowane – przez dużą liczbę odcinków poprowadzonych w kwadracie, jak też ze względu na sformułowanie „wykaż”.

Głównym celem było policzenie pola i obwodu figury EFKL, która okazała się być trapezem równoramiennym. Wiedząc też, że pole kwadratu ABCD jest równe a^2, a długość jego przekątnej jest równa $a\sqrt{2}$, należało więc wykazać, że: (a) $\frac{1}{6}a^2 < P_{EFKL} < \frac{1}{4}a^2$ i (b) $Ob_{EFKL} < 2a\sqrt{2}$. Jeśli poprawnie zostało policzone pole figury EFKL, to raczej nie powinno było być problemu z wykazaniem tej pierwszej własności. Natomiast w wykazaniu drugiej własności odnośnie obwodu figury pojawiają się problemy z porównaniem liczb niewymiernych – w końcowym efekcie otrzymujemy, że $\frac{7}{6}a\sqrt{2} + \frac{1}{6}a\sqrt{10} < 2a\sqrt{2}\ \ /:\frac{a}{6}$, po przekształceniach prowadzi to do nierówności $\sqrt{10} < 5\sqrt{2}$. Tym uczniom, którzy rozwiązali tę część zadania, wykazanie prawdziwości nierówności nie sprawiło trudności, gdyż wykorzystali kalkulator i porównywali liczby przybliżone. Ale można było też tę nierówność przedstawić jako $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} < 5\cdot\sqrt{2}$, a stąd już tylko dochodziło się do potwierdzenia prawdziwości, że jednak $\sqrt{5} < 5$.

Zadanie 4 (Pp/Pg – etap wojewódzki)

a) Załóżmy, że w trójkącie *ABC* dwusieczna kąta przy wierzchołku *A* przecina bok *BC* w punkcie *D*. Udowodnij, że jeśli dla punktu *S*. leżącego na dwusiecznej $\overrightarrow{AD}$ na zewnątrz trójkąta *ABC*, kąt wypukły *BSC* ma miarę $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, gdzie $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, to *S* jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta.

b) Na boku *LM* kwadratu *KLMN* wybrano punkt *A*, a na boku *MN* punkt *B* tak, że $|\sphericalangle AKB| = 45^\circ$. Wykaż, że odległość punktu *K* od prostej, przechodzącej przez punkty *A* i B, jest równa długości boku kwadratu.

Przedstaw tok swojego rozumowania.

Na etapie wojewódzkim zadanie 4 okazało się dla uczniów najtrudniejszym. Być może zniechęcił ich dowód własności geometrycznej. W części (a) trudno było oczekiwać od uczniów znajomości twierdzenia o położeniu środka okręgu dopisanego do trójkąta. Można jednak było, poprzez analogię do położenia środka okręgu wpisanego w trójkąt, przeprowadzić „intuicyjnie” podobne rozumowanie, co pozwalało na przeprowadzenie dowodu. W części b) zadania można było wykorzystać zależność udowodnioną w części a), ale nie wszyscy z tego skorzystali. Uczniowie podawali swoje własne oryginalne rozwiązania, powołując się na (ich zdaniem) oczywiste zależności, które niekoniecznie były prawdziwe.

Zadania własne uczniów

W tegorocznej edycji zmieniono tematykę zadań własnych – nowością było „praktyczne zastosowanie matematyki”, bez zmian pozostała: „geometria wielokątów”, „geometria przestrzenna”.

Zmiana ta spowodowała, że wśród nadesłanych 46 zadaniach własnych (30 ze szkół podstawowych i 16 ze szkół średnich) aż 18 zadań miało taki charakter „praktyczny” (SP – 10 zadań, szkoły średnie – 8 zadań) (Tabela 4). Autorzy tych zadań niemal prześcigali się w pomysłach – opisywali proces projektowania parku, pieczenia ciasta, budowania domów, naśnieżania stoków, ale też opisywali sytuacje fantastyczne (zagadnienia bliskie problematyki Stanisława Lema, nawiązania do „Władcy pierścieni” itp.). Zadania „praktyczne” w swojej treści były dość długie (niemal epickie), jednak ich treść była wciągająca, a co dopiero proponowane rozwiązania.

I choć zadania były różne, to zastosowano kryteria oceny, niezależne od treści zadań. Kryteria – podane na stronie internetowej konkursu PLZ *Zdolni z Pomorza* – były tak dobrane, aby zapewniona była porównywalność zadań, bez względu na ich problematykę i stopień trudności.

Wśród zadań praktycznych były takie, które nawiązywały do pory roku lub do aktualnych wydarzeń. Ciekawe zadanie dotyczyło naśnieżania stoku na Wieżycy kilkoma armatkami produkującymi sztuczny śnieg. W warunkach zadania podany był czas pozostały do otwarcia stoku, wymagania techniczne dotyczące grubości pokrywy śnieżnej oraz wydajność armatek. Sztuczne naśnieżanie wspomagała natura, sypiąc naturalnym śniegiem. Jak

Tabela 4. Dane dotyczące uczniów ze szkół podstawowych oraz ze szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych [zadania własne – PLZ 2020-2021 etap wojewódzki]

	Liczba punktów (%)			Typ zadania		
Liczba nadesłanych zadań	Za mniej niż 60% pkt.	Za 60-80% pkt.	Za więcej niż 80% pkt.	Zadanie „szkolne”	Co najmniej 2 sposoby rozwiązania	Zadanie kilku-etapowe
Szkoła podstawowa (klasy 7 i 8) Liczba nadesłanych zadań – 30	17	11	2	9	6	17
Szkoła ponadpodstawowa i ponadgimnazjalna Liczba nadesłanych zadań – 16	0	13	3	1	9	6

widać, samo wymyślenie zadania, wyszukanie danych technicznych (lub ich wymyślenie) wymagało od autorki zadania sporego nakładu pracy – zarówno przy sformułowaniu zadania, jak i przy zaprezentowaniu rozwiązania.

Zadaniem o oryginalnej i jakże na czasie treści, było zadania ucznia szkoły podstawowej, dotyczące ograniczeń w liczbie osób przybywających w pomieszczeniach zamkniętych – w tym przypadku dotyczyło przekroczenia liczby wiernych w kościele podczas nabożeństwa, za co Sanepid nałożył karę. Do zadania dołączony był obrys kościoła z podanymi wymiarami. Czy można było uniknąć kary, otwierając na przykład drzwi do kaplicy lub organizując dwie msze zamiast jednej? Zadanie nie było trudne do rozwiązania, jednak wyróżniało się ciekawą i aktualną treścią.

Warto wymienić też zadanie o przyjęciu na 2020 osób, na którym urodzinowy tort dzielono według ściśle określonej procedury między wszystkich obecnych, stojących w jakże długiej kolejce. Solenizant także ustawił się w tej kolejce i chciałby otrzymać największy kawałek – autor zadania wyliczył, że musiałby on stanąć jako 45 w kolejce. Z kolei spóźnialska 2021 osoba, która też liczyłaby na największy kawałek tortu, miałaby taką szansę, jeśli w kolejce do tortu urodzinowego stałoby od 4082421 do 4086461 osób. Że zadanie trochę irracjonalne i nie z tej planety, że jakiż wielki musiałby być ten tort, aby obdzielić wszystkich obecnych na przyjęciu – to jest najmniej istotne. Chociaż zadanie jest podobne w swojej idei do znanych zadań z dzielenia orzechów czy monet miedzy kilka osób, to jednak w tym przypadku przy tak dużej liczbie osób do dzielonego tortu samo rozwiązanie wymaga rozumowania z tzw. „wyższej półki”.

Takich „rodzynków” wśród zadań własnych było więcej – pełnych fantazji, pomysłowych.

Podsumowanie

Konkurs przewiduje samodzielne rozwiązywanie zadań z etapu powiatowego. Po kilku latach można przekonać się, że większości uczniom rzeczywiście zależy na samodzielnym rozwiązywaniu zadań – poszukują analogii, dokształcają się i rozwijają niezbędne umiejętności matematyczne. Zawsze jest to możliwe do zweryfikowania na etapie wojewódzkim.

Zeszłoroczny etap wojewódzki ze względu na panującą pandemię koronawirusa został ograniczony jedynie do nadesłania tzw. zadania dodatkowego. W tegorocznej edycji PLZ *Zdolni z Pomorza* organizatorzy zdecydowali się przeprowadzić ten etap w formie online. Organizatorzy konkursu i sprawdzający zadania są przekonani, że wszystkim uczestnikom etapu wojewódzkiego bardzo zależało na tym, aby oceniający uwierzyli w ich samodzielną pracę. Widać to zarówno po sposobie zapisu rozwiązań (przekreślenia, zamazania, notatki z boku, wyjaśnienia), jak i liczbie przysyłanych zadań. Często uczniowie nadsyłali rozwiązania tylko kilku zadań, gdyż nie wszystkie potrafili rozwiązać. Poza tym porównując wyniki z etapu szkolnego, powiatowego, jak i z poprzednich lat konkursu, można prześledzić możliwości i rozwój ucznia. Z niektórymi nazwiskami uczniów (a właściwie z ich pracami) spotykamy się, jak ze starymi znajomymi, rozpoznajemy ich styl zapisu i rozumowania, pewne osobiste naleciałości, wczytujemy się w ich charaktery pisma.

Gratuluję wszystkim uczestnikom tegorocznych zmagań matematycznych na wszystkich etapach PLZ *Zdolni z Pomorza*. Dziękuję za podjęcie próby zmierzenia się z problemami matematycznymi. W szczególności dziękuję za arcyciekawe i pomysłowe zadania własne.

Gratuluję nauczycielom-opiekunom, którzy mobilizowali uczniów i niejednokrotnie wspierali swych podopiecznych w ich rozwoju, służąc im radą, wskazówkami i pomocą.

Jerzy Paczkowski
Ekspert Pomorskiej Ligi Zadaniowej *Zdolni z Pomorza* w zakresie matematyki. Nauczyciel dyplomowany, doradca metodyczny z matematyki, a następnie konsultant ODN ds. diagnozy i edukacji matematycznej w latach 1993-2018. Nauczyciel matematyki w szkole podstawowej i w szkole średniej. Egzaminator egzaminów maturalnych z matematyki. Członek Polskiego Towarzystwa Diagnostyki Edukacyjnej.