*dr Irena Domnik, dr Zofia Lewandowska*

# Jak podzielić kwadrat na kwadraty?

## REFLEKSJE PO XXI EDYCJI LIGI MATEMATYCZNEJ IM. ZDZISŁAWA MATUSKIEGO

19 maja 2022 roku uroczysta gala wręczania nagród laureatom zakończyła XXI Ligę Matematyczną im. Zdzisława Matuskiego. Ze względu na zagrożenie wirusem COVID-19 był to konkurs w formie hybrydowej – tradycyjny etap zadań domowych, półfinał w formie zdalnej i finał w murach Akademii Pomorskiej w Słupsku. Z trudnymi i niecodziennymi zadaniami zmagało się 646 uczniów z trzech poziomów edukacyjnych: 284 z klas IV-VI, 295 z klas VII-VIII szkoły podstawowej oraz 67 ze szkół ponadpodstawowych.

Przy organizacji konkursu matematycznego najważniejszy jest przemyślany dobór zadań. Muszą być niestandardowe, ciekawe, wymagające intelektualnego wysiłku, logicznego myślenia i wnioskowania. Potrzeba zastanowienia, przemyślenia, kojarzenia ze sobą własności i twierdzeń, czasem sugestii czy wskazówki nauczyciela, rodzica, czy starszego rodzeństwa. Celowym zamiarem organizatorek Ligi jest miesiąc czasu na rozwiązanie zestawów zadań z etapu pierwszego – domowego. Co roku Komitet Organizacyjny Ligi redaguje 77 problemów do rozwiązania, po 25 dla uczniów dwóch pierwszych poziomów oraz 27 dla licealistów. Niezmiennie, w każdej edycji staramy się, aby zadania były wyjątkowe, dosyć trudne, ale dostosowane do poziomu ucznia.

W kolejnych edycjach konkursu chcemy, by uczniowie nabywali nowych umiejętności i zdobywali nowe wiadomości. Dlatego dla każdej grupy wiekowej wybieramy pewien rodzaj zadań, motyw przewodni, któremu poświęcamy kilka zadań w kolejnych zestawach oraz w półfinale i finale konkursu. W ubiegłych latach były to tabele w zadaniach logicznych, diagramy Venna, zasada szufladkowa Dirichleta czy równania funkcyjne. W tym roku zagadnieniem przewodnim dla uczniów klas VII i VIII był podział kwadratu na z góry zadaną liczbę kwadratów. Wbrew pozorom nie jest to wcale takie proste. Potrzeba pewnego sprytu, geometrycznej wyobraźni i kreatywności, aby sprostać temu zadaniu.

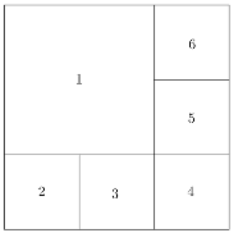
Przedstawimy rozwiązania uczniowskie zadań związanych z podziałem kwadratu na kwadraty i uogólnienie tego zagadnienia, czyli twierdzenie z dowodem.

### ZADANIE 3, KL. VII-VIII, PAŹDZIERNIK 2021

Rozetnij kwadrat na sześć kwadratów. Oblicz stosunek pól największego i najmniejszego z otrzymanych kwadratów.

**Rozwiązanie**

Podział kwadratu na sześć części prezentuje rysunek:




Przyjmijmy, że bok kwadratu ma długość $a$. Po rozcięciu na sześć kwadratów największy z otrzymanych czworokątów $K_1$ ma bok o długości $\frac{2}{3}a$, a najmniejszy $K_2 - \frac{1}{3}a$. Wtedy pole kwadratu $K_1$ jest równe

$$P_1 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{4}{9}a^2,$$

a pole kwadratu $K_2$ to

$$P_2 = \left(\frac{1}{3}a\right)^2 = \frac{1}{9}a^2.$$

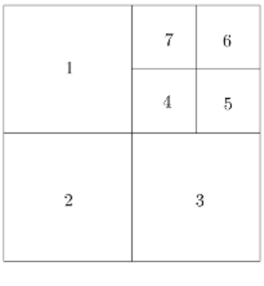
W rezultacie stosunek pól największego i najmniejszego z otrzymanych kwadratów jest równy 4 : 1.

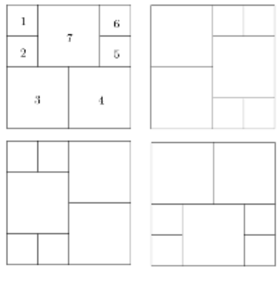
### ZADANIE 5, KL. VII-VIII, GRUDZIEŃ 2021

Rozetnij kwadrat na siedem kwadratów. Znajdź stosunek obwodów największego i najmniejszego z otrzymanych kwadratów.

**Rozwiązanie**

Zauważmy, że pomysł na podział na siedem kwadratów jest zupełnie inny niż na sześć kwadratów, co przedstawiają poniższe rysunki:



Przyjmijmy, że bok kwadratu ma długość $a$. Po rozcięciu na siedem kwadratów największy z otrzymanych czworokątów $K_1$ ma bok o długości $\frac{a}{2}$, a najmniejszy $K_2 - \frac{a}{4}$. Wtedy obwód kwadratu $K_1$ jest równy $O_1 = 4 \cdot \frac{a}{2} = 2a$, obwód kwadratu $K_2$ wynosi

$$O_2 = 4 \cdot \frac{a}{4} = a.$$

W rezultacie stosunek obwodów największego i najmniejszego z otrzymanych kwadratów jest równy 2 : 1.

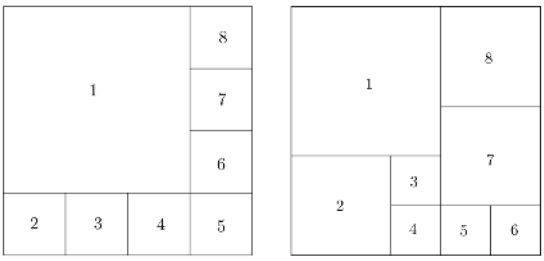
Sprawdzeniem przyswojonej wiedzy było zadanie 1 z półfinału, w którym należało podzielić kwadrat na osiem i trzynaście części. Ponieważ pomysłów na podział było wiele i są to różne rozwiązania, więc nie przedstawiamy jednego rozwiązania liczbowego, a tylko różne sposoby podziału.

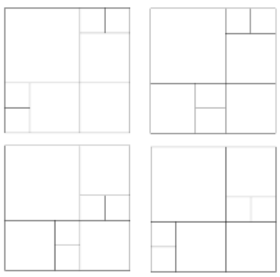
**ZADANIE 1, KL.VII-VIII, PÓŁFINAŁ 2022**

Adam narysował dwa jednakowe kwadraty. Następnie jeden podzielił na osiem, a drugi na trzynaście mniejszych kwadratów. Oblicz stosunek pola największego kwadratu z podziału na osiem części do pola najmniejszego kwadratu z podziału na trzynaście części.

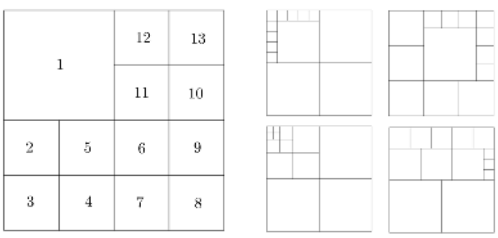
**Rozwiązanie**

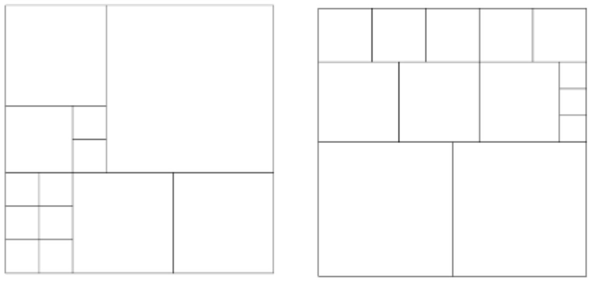
Podział na osiem kwadratów



Podział na trzynaście kwadratów według pomysłów półfinalistów pozwalał na różnorodność:



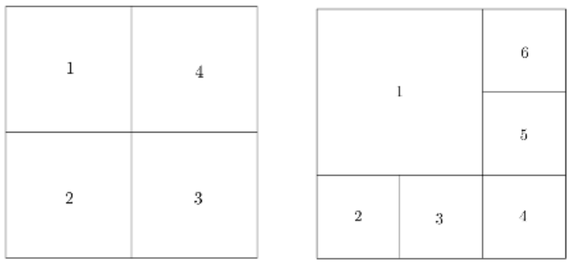
Okazuje się, że można dokonać podziału kwadratu na $n$ kwadratów, gdy $n=4$ lub jest dowolną liczbą naturalną większą niż 5

**TWIERDZENIE**

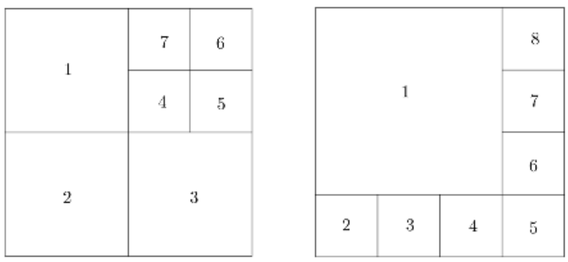
Każdy kwadrat można podzielić na $n$ kwadratów, gdy $n=4$ lub $n$ jest dowolną liczbą naturalną większą niż 5

**Dowód**

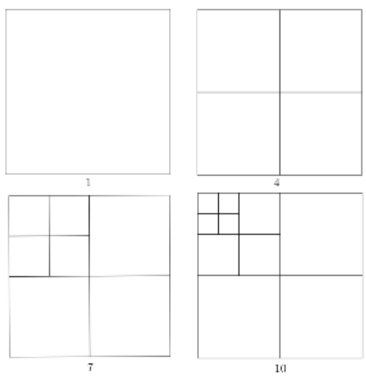
Oczywiście łatwo podzielić kwadrat na cztery przystające kwadraty lub na sześć kwadratów:




Kwadrat można podzielić na siedem kwadratów lub na osiem kwadratów:

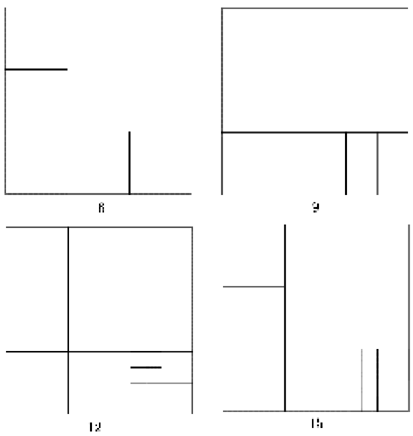



Rozważmy teraz kolejno podziały przedstawione wcześniej:



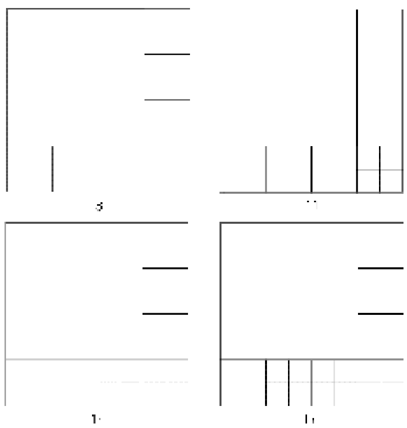
Zauważmy najpierw, że dzieląc jeden kwadrat na 4 mniejsze przystające, liczba kwadratów podziału zwiększa się o 3. Postępując dalej podobnie uzyskujemy podział na 13, 16, 19, 22, 25, … kwadratów. Ogólnie: **rozpoczynając od podziału na 4 kwadraty, potrafimy podzielić go na taką liczbę kwadratów, większą od 4, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.**

Zacznijmy teraz od 6 kwadratów:



Postępując analogicznie otrzymamy podział na 18, 21, 24, 27, 30, … kwadratów. W konsekwencji: **rozpoczynając od podziału na 6 kwadratów, uzyskujemy podział na taką liczbę kwadratów, większą od 6, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 0.**

I na koniec zacznijmy od 8 kwadratów:



Postępując dalej w podobny sposób uzyskujemy podział na 20, 23, 26, 29, 32, …kwadratów.

Rozpoczynając od podziału na 8 kwadratów, możemy podzielić go na taką liczbę kwadratów, większą od 8, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

A teraz rozważmy sytuację ogólną. Załóżmy, że mamy podział początkowy na $n$-kwadratów. Z tego podziału możemy uzyskać podział na $n + 3$, $n + 6$, $n + 9$, $n + 12$, ... części, czyli: $n + 3m$, gdzie $m = 0, 1, 2, 3, 4, ...$

Dla $n = 6$ mamy $n + 3m = 6 + 3m = 3(2 + m)$;
dla $n = 7$ mamy $n + 3m = 7 + 3m = 6 + 3m + 1 = 3(2 + m) + 1$;
dla $n = 8$ mamy $n + 3m = 8 + 3m = 6 + 3m + 2 = 3(2 + m) + 2$.

Ponieważ każda liczba naturalna przy dzieleniu przez 3 daje resztę 0, 1 lub 2, więc powyższe wzory wyczerpują wszystkie liczby naturalne większe od 5.

Wszystkich, którzy chcą zmierzyć się z podobnymi problemami matematycznymi, zapraszamy do wzięcia udziału w kolejnych edycjach Ligi Matematycznej im. Zdzisława Matuskiego.

* Ligę Matematyczną prowadzą pracownicy Instytutu Nauk Ścisłych i Technicznych Akademii Pomorskiej w Słupsku we współpracy z nauczycielami I Liceum Ogólnokształcącego im. Bolesława Krzywoustego w Słupsku.

**dr Irena Domnik**
Nauczyciel akademicki Instytutu Nauk Ścisłych i Technicznych Akademii Pomorskiej w Słupsku z 35-letnim stażem pracy. Współorganizatorka konkursu Liga Matematyczna im. Zdzisława Matuskiego. Współautorka „Zbioru zadań z topologii ogólnej z rozwiązaniami” oraz czterech tomów „Zostań mistrzem matematyki. Zbiór zadań z ligi matematycznej z rozwiązaniami.

**dr Zofia Lewandowska**
Nauczyciel akademicki Instytutu Nauk Ścisłych i Technicznych Akademii Pomorskiej w Słupsku z 33-letnim stażem pracy. Współorganizatorka konkursu Liga Matematyczna im. Zdzisława Matuskiego. Współautorka „Zbioru zadań z topologii ogólnej z rozwiązaniami” oraz czterech tomów „Zostań mistrzem matematyki. Zbiór zadań z ligi matematycznej z rozwiązaniami”.