Irena Domnik
Zofia Lewandowska

Historia jednego zadania
PO FINALE XX LIGI MATEMATYCZNEJ W KATEGORII: SZKOŁA PONADPODSTAWOWA

XX edycja Ligi Matematycznej im. Zdzisława Matuskiego w roku szkolnym 2020/21 przeszła już do historii. W kategorii: szkoła ponadpodstawowa, tegoroczna Liga składała się z czterech miesięcznych etapów domowych z zestawem pięciu zadań (październik-styczeń) oraz finału zawierającego siedem zadań. Zmagania finałowe w formie zdalnej w trzech grupach pod nadzorem Komisji Konkursowej miały miejsce 20 kwietnia 2021 roku. Z trudnymi zadaniami finałowymi zmierzyło się 44 uczniów. Zadania dla uczniów szkół ponadpodstawowych to zagadnienia nieszkolne, wymagające wiedzy spoza podstawy programowej. W tym roku do rozwiązania zadań konieczna była znajomość zagadnień z teorii niezmienników, metod rozwiązywania równań funkcyjnych, równań diofantycznych, układów równań cyklicznych, zasady szufladkowej Dirichleta, zagadnień z teorii liczb oraz twierdzeń z geometrii.

ZESTAW ZADAŃ FINAŁU:

ZADANIE 1. Wykaż, że spośród dowolnych siedmiu liczb naturalnych można wybrać dwie liczby *a,b* takie, że różnica $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 10.

ZADANIE 2. W zbiorze liczb rzeczywistych rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + x(y-4) = -2 \\ y^2 + y(x-4) = -2. \end{cases}$$

ZADANIE 3. *a,b,c,d,e* są to liczby 7, 8, 9, 10, 11, ale ustawione w innej, przypadkowej kolejności. Wykaż, że iloczyn $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)$ jest liczbą parzystą.

ZADANIE 4. W wycinek koła o promieniu *R* wpisano okrąg o promieniu *r*. Cięciwa łącząca promienie wycinka koła ma długość *2a* . Wykaż, że

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}.$$

ZADANIE 5. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości *a,b*. Wyznacz długość odcinka wyciętego z dwusiecznej kąta prostego przez przeciwprostokątną.

ZADANIE 6. Adam użył dwukrotnie każdej z cyfr 1, 2, 3, …, 9 i utworzył kilka parami różnych liczb pierwszych w taki sposób, że suma tych liczb jest możliwie najmniejsza. Oblicz tę sumę.

ZADANIE 7. Funkcja $R \to R$ spełnia warunek

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2022}{x}\right) = 5x$$

dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej *x*. Oblicz *f(6)*

Za każde zadanie można było otrzymać 10 punktów (łącznie 70 punktów). Liczba uzyskanych przez finalistów punktów ułożyła się następująco:

Oczywiście, na największe gratulacje zasługuje dwoje uczniów (4,55%), którzy zdobyli maksymalną liczbę punktów. O wysokim poziomie tegorocznego finału świadczy liczba aż 16 osób (36,4 %), które zdobyły od 60 do 69 punktów. Natomiast średnia liczba uzyskanych punktów to 49,25, więc rozwiązanych prawie pięć z siedmiu zadań.
Interesująco przedstawia się średnia punktów uzyskanych za poszczególne zadania:

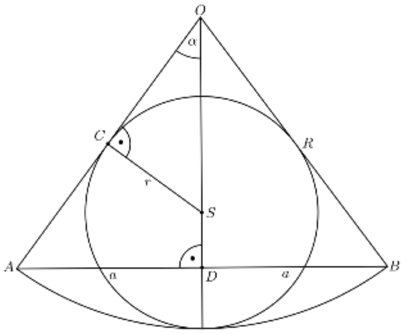
Łatwo zauważyć, że zadanie 3 okazało się najprostsze i większość uczniów uzyskała za nie maksymalną liczbę 10 punktów. Najtrudniejsze okazały się zadania 6 i 4.

Poniżej prezentujemy rozwiązania tych zadań zaproponowane przez Komisję Konkursową:

ROZWIĄZANIE ZADANIA 6: Żadna liczba pierwsza różna od 2 i 5 nie może się kończyć cyfrą 5 lub cyfrą parzystą. Zatem każda z cyfr 2, 5, 4, 4, 6, 6, 8, 8 musi pojawić się jako cyfra co najmniej dziesiątek wśród napisanych liczb pierwszych. Ponadto każda z cyfr 2, 5, 1, 1, 3, 3, 7, 7, 9, 9 musi wystąpić wśród liczb pierwszych jako cyfra jedności. Zatem szukana suma wynosi co najmniej 477, bo 10(2+5+4+4+6+6+8+8)+(2+5+1+1+3+3+3+7+7+9+9) = 477.

Przykładem żądanego zestawu liczb pierwszych jest: 2, 5, 29, 53, 41, 47, 61, 67, 83, 89.

ROZWIĄZANIE ZADANIA 4: Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku:



Rys. 1

Trójkąt OCS jest podobny do trójkąta ADO na podstawie cechy (kąt-kąt). To implikuje kolejno:

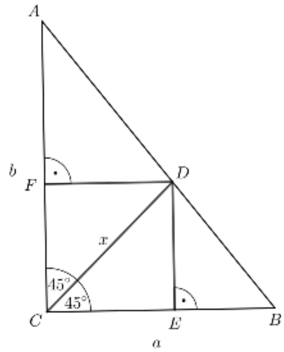
$$\frac{r}{a} = \frac{R-r}{R}$$
$$Rr = aR - ar$$
$$Rr + ar = aR.$$

Mnożąc teraz obie strony równania przez

$\frac{1}{aRr}$ dostajemy $\frac{Rr}{aRr} + \frac{ar}{aRr} = \frac{aR}{aRr}$, czyli $\frac{1}{a} + \frac{1}{R} = \frac{1}{r}$.

Dla Komisji Konkursowej interesujące okazały się rozwiązania **Zadania 5** – ze względu na różnorodność metod zastosowanych przez finalistów, którzy wykazali się dużą kreatywnością i znajomością różnych twierdzeń geometrycznych. W przypadku zadań z geometrii bardzo często nie istnieje tylko jedna metoda rozwikłania zagadnienia. Poniżej przedstawiamy rozwiązania finalistów. Rozpoczniemy od wprowadzenia oznaczeń wspólnych dla wszystkich sposobów rozwiązania.

Przez x oznaczmy szukaną długość odcinka wyciętego z dwusiecznej kąta prostego przez przeciwprostokątną oraz wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku:



Rys. 2

Na początku zauważmy, że czworokąt *CEDF* jest kwadratem, więc szukana długość x jest długością jego przekątnej. Oznaczmy długość boku kwadratu *CEDF* przez y. Zatem $x = y\sqrt{2}$.

Metoda nr 1 – zastosowanie równoważności figur

Widać, że pole trójkąta *CBA* jest sumą pól trójkątów *CBD* i *ACD*. Zapiszmy to symbolicznie

$$\frac{ab}{2} = \frac{ay}{2} + \frac{by}{2}.$$

Stąd $y = \frac{ab}{a+b}$, czyli $x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Wynik uzyskamy szybciej, jeśli zastosujemy inny wzór na pole trójkąta: $\frac{ab}{2} = \frac{ax\ \sin 45°}{2} + \frac{bx\ \sin 45°}{2}$.

Podstawiając $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ otrzymujemy szukaną wartość x.

Metoda nr 2 – zastosowanie podobieństwa trójkątów

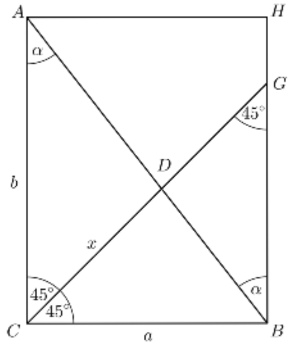
Ta metoda była najczęściej stosowana przez finalistów, przy czym różny był wybór pary trójkątów podobnych. Rzuty prostopadłe punktu *D* na przyprostokątne wyznaczają trójkąty podobne na mocy cechy podobieństwa (kąt-kąt): *CBA* i *EBD, CBA* i *FDA* oraz *EBD* i *FDA*.

Rozważmy pierwszą wskazaną parę. Z podobieństwa trójkątów *CBA* i *EBD* mamy $\frac{a-y}{y} = \frac{a}{b}$.

Wtedy $y = \frac{ab}{a+b}$, a w konsekwencji $x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Analogicznie postępujemy w dwóch pozostałych przypadkach.

Intrygujące rozwiązanie zaproponował finalista z Gdyni. Mianowicie skonstruował drugi trójkąt przystający do danego, tworząc prostokąt tak, jak na rysunku:

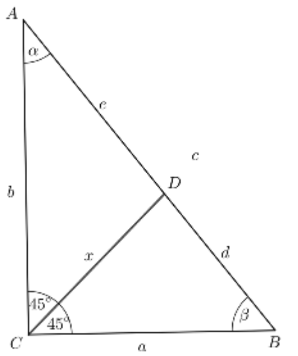


Rys. 3

Trójkąt *BHA* jest przystający do *CBA*. Punkt *G* jest punktem przecięcia dwusiecznej *CD* i boku *BH*. Wówczas kąty *GCA* i *CGB* mają równe miary jako kąty naprzemianległe wewnętrzne przy prostych równoległych C*A* i *BH* przeciętych prostą *CG*. Analogicznie, równe miary mają kąty *CAB* i *HBA*. Zatem trójkąty *CDA* i *DBG* są podobne na mocy cechy podobieństwa (kąt-kąt). Ponadto zauważmy, że trójkąt *CBG* jest prostokątny równoramienny, czyli $|BG| = a$ oraz $|CG| = a\sqrt{2}$.
Ostatecznie możemy zapisać: $\frac{a\sqrt{2}-x}{x} = \frac{a}{b}$.
Po przekształceniach dostajemy $x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Metoda nr 3 – zastosowanie twierdzenia Talesa
Niektórzy finaliści do konfiguracji z Rys. 2 zastosowali twierdzenie Talesa i uzyskali te same równości, co w metodzie nr 2. Na przykład: $\frac{|BE|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|CA|}$, czyli $\frac{a-y}{y} = \frac{a}{b}$.
Kolejne dwie metody wykorzystują funkcje trygonometryczne.

Metoda nr 4 – zastosowanie twierdzenia sinusów
Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia jak na rysunku:



Rys. 4

Z twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkątów *CDA* oraz *CBD* uzyskujemy równości

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{e}{\sin 45^\circ} \text{ oraz } \frac{x}{\sin\beta} = \frac{d}{\sin 45^\circ}$$

Dodając je stronami mamy

$$\frac{x}{\sin\alpha} + \frac{x}{\sin\beta} = \frac{e}{\sin 45^\circ} + \frac{d}{\sin 45^\circ}.$$

Wykorzystując funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym dostajemy

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ oraz } \sin\beta = \frac{b}{c}.$$

W rezultacie otrzymujemy kolejno

$$\frac{xc}{a} + \frac{xc}{b} = \frac{e+d}{\sin 45^\circ},\ \frac{xc}{a} + \frac{xc}{b} = c\sqrt{2},\ x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

Dwóch finalistów wykorzystało w twierdzeniu sinusów również kąty przy wierzchołku *D*, ale wówczas konieczna była znajomość wzoru na sinus sumy dwóch kątów. Natomiast finalistka z Gdyni dodatkowo do wyznaczenia wartości *d* zastosowała twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta, tj. równość $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$.

Bardziej pracochłonne okazało się wykorzystanie twierdzenia cosinusów.

Metoda nr 5 – zastosowanie twierdzenia cosinusów
Przyjmując oznaczenia jak na Rys. 4, z twierdzenia cosinusów zastosowanego w trójkącie *CDA* oraz *CBD* możemy zapisać:

$$d^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos 45^\circ$$
$$e^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos 45^\circ$$

Dodając stronami powyższe równości mamy

$$d^2 + e^2 = a^2 + b^2 + 2x^2 - (a+b)x\sqrt{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że $a^2 + b^2 = c^2$.
Ponadto $d + e = c$. Zatem

$$d^2 + e^2 = (d+e)^2 + 2x^2 - (a+b)x\sqrt{2}.$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia powyższe wyrażenie przyjmuje postać:

$$0 = 2de + 2x^2 - (a+b)x\sqrt{2}.$$

Wróćmy do Rys. 2. Z podobieństwa trójkątów *CBA* i *EBD* oraz *CBA* i *FDA* mamy $\frac{c}{a} = \frac{e}{y}$ oraz $\frac{c}{b} = \frac{d}{y}$.
Ponadto przedstawmy *y* w zależności od *x*, tj. $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$.
Teraz wyznaczając odpowiednio *e* i *d* oraz wstawiając do ostatniego równania uzyskujemy

$$\frac{c^2x^2}{ab} + 2x^2 - (a+b)x\sqrt{2} = 0.$$

Powyższy warunek i twierdzenie Pitagorasa implikują kolejno:

$$\frac{x^2(a^2+b^2)}{ab} + 2x^2 - (a+b)x\sqrt{2} = 0,$$
$$(a^2+b^2) + 2ab)x^2 - (a+b)abx\sqrt{2} = 0,$$
$$x^2(a+b)^2 - (a+b)abx\sqrt{2} = 0.$$

Jedynym niezerowym rozwiązaniem tego równania kwadratowego jest $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Analogiczne rachunki wykonała finalistka z Gdańska, która zamiast podobieństwa trójkątów wykorzystała w powyższym rozumowaniu twierdzenie o dwusiecznej.

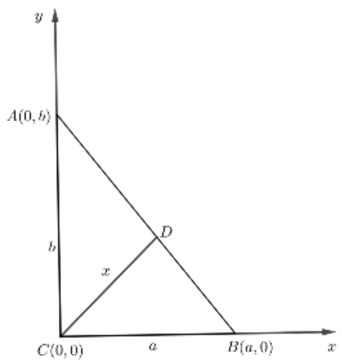
Metoda nr 6 – zastosowanie twierdzenia Stewarta
Podobne, jak w poprzedniej metodzie, rachunki wykonali dwaj finaliści, którzy wykazali się znajomością twierdzenia Stewarta (można je udowodnić stosując twierdzenie cosinusów).
Dla konfiguracji Rys. 4 z twierdzenia Stewarta otrzymujemy równość:

$$a^2d + b^2e - x^2c = ced.$$

Widać już, że dalsze rachunki są analogiczne do tych powyżej, więc je pomijamy.

Na koniec przedstawimy rozwiązanie metodą współrzędnych.

Metoda nr 7 – zastosowanie geometrii analitycznej
Umieśćmy trójkąt *CBA* w układzie współrzędnych jak na rysunku 5:



Rys. 5

Z założenia *a* i *b* są liczbami dodatnimi. Prosta *CD* jest dwusieczną kąta prostego, więc jej równanie to $y = x$. Niech $y = mx + n$ będzie równaniem prostej *AB*. Aby wyznaczyć współczynniki *m* i *n* należy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 0 = ma + n \\ b = m \cdot 0 + n \end{cases}$$

Stąd $n = b$ oraz $m = -\frac{b}{a}$. Zatem $y = -\frac{b}{a}x + b$ jest równaniem prostej *AB*. Punkt $D(x_D, x_D)$ jest punktem przecięcia prostych *AB* i *CD,* więc jego współrzędne spełniają równania tych prostych, czyli

$$x_D = -\frac{b}{a}x_D + b.$$

W konsekwencji $x_D = \frac{ab}{a+b}$.

Zatem długość odcinka *CD* obliczamy ze wzoru:

$$x = \sqrt{\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{ab}{a+b}\right)^2} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

To czyste piękno w matematyce - jedno zadanie, a siedem sposobów dojścia do wyniku, przy wykorzystaniu różnych twierdzeń i pomysłów. Dlatego warto uczestniczyć w zmaganiach konkursowych – wyzwalają kreatywność, pobudzają logiczne myślenie, pozwalają na twórcze poszukiwania optymalnych rozwiązań.

Wszystkich, którzy chcą zmierzyć się z podobnymi problemami matematycznymi, zapraszamy do wzięcia udziału w kolejnych edycjach Ligi Matematycznej im. Zdzisława Matuskiego.

*Ligę Matematyczną prowadzą pracownicy Instytutu Nauk Ścisłych i Technicznych Akademii Pomorskiej w Słupsku we współpracy z nauczycielami I Liceum Ogólnokształcącego im. Bolesława Krzywoustego w Słupsku.

dr Irena Domnik
Adiunkt w Instytucie Nauk Ścisłych i Technicznych Akademii Pomorskiej w Słupsku. Nauczyciel akademicki z 30-letnim stażem pracy. Współorganizatorka konkursu Liga Matematyczna im. Zdzisława Matuskiego. Współautorka „Zbioru zadań z topologii ogólnej z rozwiązaniami" oraz czterech tomów „Zostań mistrzem matematyki. Zbiór zadań z ligi matematycznej z rozwiązaniami".

dr Zofia Lewandowska
Starszy wykładowca w Instytucie Nauk Ścisłych i Technicznych Akademii Pomorskiej w Słupsku. Nauczyciel akademicki z 30-letnim stażem pracy. Współorganizatorka konkursu Liga Matematyczna im. Zdzisława Matuskiego. Współautorka „Zbioru zadań z topologii ogólnej z rozwiązaniami" oraz czterech tomów „Zostań mistrzem matematyki. Zbiór zadań z ligi matematycznej z rozwiązaniami".

Justyna Szczypek-Bogdanowicz

Gdzie cyfrowy emigrant spotyka cyfrowego tubylca

JAK ROZPOCZĄĆ PRZYGODĘ Z KRAJOWYMI I MIĘDZYNARODOWYMI PROJEKTAMI eTWINNING NA WSZYSTKICH PRZEDMIOTACH?

W codziennej pracy nauczyciela, zwłaszcza w okresie pandemii, często zastanawiamy się jak aktywizować uczniów. Ich motywacja i aktywność stanowią priorytet nauczycielskich decyzji. Obecnie, kiedy czujemy się pewniej w zakresie znajomości technologii informacyjnych znalezienie bodźca, który skutecznie pobudzi uczniów do działania jest jeszcze większym wyzwaniem. Kształcąc cyfrowych tubylców, czyli już wszystkie roczniki uczniów, stajemy przed dość dużym wyzwaniem, aby dorównać im kroku w obsłudze różnorodnych narzędzi cyfrowych, a nawet, żeby zaimponować im znajomością TIK i zachęcić do przyswajania wiedzy. Jeśli nie chcemy zostać w tyle za uczniem w sferze nowoczesnych technologii to platforma eTwinning będzie dla nas skutecznym i zasobnym wsparciem.

Jak czytamy na stronie głównej portalu eTwinning oferuje on „platformę współpracy dla pracowników szkół tj. nauczycieli, dyrektorów szkół, bibliotekarzy, itp. z krajów europejskich, które tutaj komunikują się, współpracują i realizują projekty, dzielą się i, mówiąc krótko, czują się i są częścią najbardziej ekscytującej społeczności edukacyjnej w Europie". Co ciekawe chociaż współpraca w realizacji projektów europej-