Jerzy Paczkowski

Matematyka – teoria, intuicja czy praktyka

Tym razem szósta edycja Pomorskiej Ligi Zadaniowej *Zdolni z Pomorza* – pomimo chwilowych krótkich przerw w nauce stacjonarnej – przebiegała w warunkach, rzec by można, „normalnych” czyli w formie stacjonarnej (etap szkolny i wojewódzki).

Na etapie szkolnym matematyka cieszy się dużą popularnością, dlatego zadania są tak skonstruowane, aby uczniowie mogli wykazać się nie tylko znajomością teorii i biegłością matematyczną, ale również intuicją i praktycznym podejściem do zadań. Niestety, z konieczności zestaw szkolny także pełni funkcję różnicującą uczniów, chociaż w zestawie zawsze znajdują się zadania, które wymagają jedynie obliczeń lub praktycznego podejścia do zagadnienia. W tej edycji to różnicowanie dało się zauważalnie odczuć – wielu bardzo dobrych uczniów było rozczarowanych wynikami, ale też była spora grupa uczniów zaskoczonych, że zauważono ich niekonwencjonalne podejście do zagadnień. Takie są prawa konkursu.

Do etapu powiatowego zakwalifikowano około 7% uczniów szkół podstawowych (SP), rozwiązujących zadania z matematyki na etapie szkolnym (kwalifikacyjnym) i około 10% uczniów szkół ponadpodstawowych/ponadgimnazjalnych (PP/PG). Tylko nieco ponad 63% wszystkich uczniów, zakwalifikowanych do etapu powiatowego, nadesłało rozwiązania zadań, zamieszczonych na stronie internetowej konkursu. **W nadesłanych pracach niekoniecznie przedstawiano rozwiązania wszystkich zadań. Należy więc przypuszczać, że część uczniów chciało sprawdzić się w matematyce, choćby w tych zadaniach „pozornie” łatwiejszych.** Dobrze to świadczy o uczniach i ich nauczycielach.

Na etapie powiatowym uczniowie nie byli ograniczeni czasem – mieli kilkanaście dni, aby móc wielokrotnie „przyjrzeć się” zadaniom, oswoić się z nimi, podjąć kolejne próby ich rozwiązania. Mogli poszerzać swoją wiedzę matematyczną, skorzystać przy tym z dodatkowych informacji z dziedziny matematycznej (z podręczników, z internetu), jak też z konsultacji z nauczycielem. Ten etap pracy samodzielnej w pewnym sensie miał charakter twórczy. Natomiast do etapu wojewódzkiego konkursu przystąpiło nieco ponad 82 % wszystkich zakwalifikowanych uczniów do tego etapu.

Poniżej przeanalizuję zadania, które przy intuicyjnym i bardziej praktycznym podejściu powinny być rozwiązane przez większość uczniów.

Etap szkolny a zadania „praktyczne” i typowo szkolne

Na etapie szkolnym – jak wcześniej wspomniałem – były zarówno zadania łatwiejsze, typowo szkolne, może trochę na wyobraźnię, jak też i zadania nieco trudniejsze, wymagające pewnego szerszego spojrzenia na problem, z wykorzystaniem wiedzy matematycznej.

Zadanie 1 (SP – etap kwalifikacyjny/szkolny) – *tekst tego zadania jest dość długi, więc tylko krótko przedstawię.*
Zadanie dotyczyło prostokątnego obszaru ziemi o wymiarach 12m x 6m, który przeznaczony został na ogród kwiatowy. Działkę odpowiednio podzielono na 5 części (każda w kształcie trójkąta). Na jednych należało posadzić krzewy, między którymi ziemia miała być obsypana korą, na innych zasiać trawę, a na jeszcze innych posadzić begonie. Podano koszty krzewów, begonii, trawy i kory.
Należało obliczyć koszty założenia tego ogrodu.

I choć tekst zadania jest dość długi, to rozwiązanie zadania sprowadzało się do odpowiedniego podziału działki, zastosowania twierdzenia Pitagorasa i obliczeń. Problemem dla uczniów było właściwe rozmieszczenie krzewów w jednym z trójkątnych obszarów – przy niewielkich różnicach ilościowych uwzględniano obliczenia uczniów.

Zadanie 2 (PP/PG– etap kwalifikacyjny/szkolny)

Oblicz pole obszaru wyrażonego przy pomocy układu nierówności: $\begin{cases} |y-2| \le \frac{1}{2}x + 1 \\ y \ge |x-1| \end{cases}$

Zadanie jest typowo szkolne. Układ nierówności z wartością bezwzględną należało rozpisać na bardziej przyjazny układ: $\begin{cases} y-2 \le \frac{1}{2}x+1, & dla\ y \ge 2 \\ -y+2 \le \frac{1}{2}x+1, & dla\ y < 2 \\ y \ge x-1, & dla\ x \ge 1 \\ y \ge -x+1, & dla\ x < 1 \end{cases}$, którego obrazem w układzie współrzędnych był czworokąt ABCD o wierzchołkach $A = \left(\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, $B = (0;\ 1)$, $C = \left(-\frac{4}{3};\ \frac{7}{3}\right)$, $D = (8;\ 7)$. Mając dane współrzędne wierzchołków czworokąta, pole tego czworokąta można już było obliczyć na różne sposoby.

Etap powiatowy – zadania

Nadesłane rozwiązania zadań na etap powiatowy można już analizować zarówno pod kątem stopnia trudności, oryginalnych rozwiązań czy też popełnianych błędów w rozumowaniu. Poniższa tabela pokazuje, które z zadań były łatwiejsze, a których zadań nie wszyscy uczniowie podjęli się rozwiązywać.

Tabela 1. Dane dotyczące uczniów klasy 7 i 8 szkoły podstawowej oraz uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych [PLZ 2021/2022 – etap powiatowy]

	Zadanie 1	Zadanie 2	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5
klasy 7 i 8 SP Piszących na etapie powiatowym – 42 uczniów	41[1)] 0,79[2)] 0,81[3)]	37[1)] 0,68[2)] 0,77[3)]	39[1)] 0,70[2)] 0,75[3)]	38[1)] 0,52[2)] 0,58[3)]	31[1)] 0,40[2)] 0,54[3)]
PP/PG Piszących na etapie powiatowym – 28 uczniów	27[1)] 0,91[2)] 0,94[3)]	26[1)] 0,76[2)] 0,82[3)]	25[1)] 0,73[2)] 0,82[3)]	26[1)] 0,71[2)] 0,77[3)]	24[1)] 0,67[2)] 0,78[3)]

Legenda: 1) – liczba uczniów, którzy podjęli się rozwiązywania tego zadania; 2) – wskaźnik łatwości zadania w odniesieniu do wszystkich piszących; 3) – wskaźnik łatwości zadania tylko w odniesieniu do uczniów, którzy podjęli się rozwiązywania tego zadania.

Na podstawie liczby poprawnych rozwiązań można stwierdzić, że na tym etapie nie było zadań nazbyt trudnych – 25 uczniów szkół podstawowych na 42 piszących uzyskało 60% i więcej punktów za rozwiązanie zadań z etapu powiatowego; natomiast 24 uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych na 28 piszących uzyskało 60% i więcej punktów.

Z pewnością więcej wysiłku i pomysłowości wymagały następujące zadania różnicujące, do rozwiązań których niezbędna była szersza wiedza matematyczna, jak i pewna doza kreatywności uczniów:

- dla uczniów szkół podstawowych – zadanie 5 (wskaźnik łatwości 0,40), zadanie 4 (wskaźnik łatwości 0,52);
- dla uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych – zadanie 5 (wskaźnik łatwości 0,67).

Nie sposób przytoczyć przykładowe rozwiązania zadań, choćby ze względu na różnorodność tych rozwiązań, różne strategie w podejściu do zadania, ale i pomysłowość uczniów w „rozgryzaniu” problemu. Dlatego ograniczę się do wybranych zadań i do komentarza w odniesieniu do tych części **zadań, które przy intuicyjnym i bardziej praktycznym podejściu – przy wykorzystaniu dostępnego aparatu matematyki szkolnej – powinny być rozwiązane przez większość uczniów.**

Poniżej zostaną przytoczone przykładowe zadania.

Zadanie 5 (SP – etap powiatowy)
a) Wykaż/uzasadnij, że nie dla każdego $m \in N_+$ liczba $2m^3 - 8m$ jest podzielne przez 8. Pokaż, dla jakich liczb to zachodzi.
b) Liczby całkowite m i n są takie, że $m^2 + 9mn + n^2$ jest podzielne przez 11. Uzasadnij, że wówczas $m^2 - n^2$ jest podzielne przez 11.

W części (a) tego zadania należało przekształcić wymienione wyrażenie do postaci: $2m^3 - 8m = 2m(m-2)(m+2)$. Wystarczyło wtedy przeanalizować wyrażenie dla $m \in N_+$ parzystych i nieparzystych. Wyrażenie $2m$ jest zawsze parzyste dla dowolnego m czyli podzielne jest przez 2, natomiast każde z nawiasów $(m-2)(m+2)$ jest podzielne przez 2 tylko dla parzystych liczb m czyli wtedy iloczyn obu nawiasów jest podzielny przez 4. Tak więc całe wyrażenie $2m(m-2)(m+2)$ jest podzielne przez 8 dla każdej parzystej liczby $m \in N_+$ – co kończy dowód. Co więcej, wyrażenie to jest podzielne przez 16 dla każdej parzystej liczby m.

Sam rozkład wyrażenia na czynniki nie sprawiał uczniom kłopotu. Jednak już sama analiza wyrażenia, zapisanego w postaci iloczynowej, tak. Uczniowie zauważali, że wystarczy wykazać, iż wyrażenie $m(m-2)(m+2)$ jest podzielne przez 4. Uczniowie zauważali również, że oba wyrażenia w nawiasach różnią się o 4, więc uznawali, że iloczyn tych nawiasów zawsze jest podzielny przez 4. Niestety, to był błąd w rozumowaniu, ponieważ to jest prawdziwe tylko, gdy m jest parzyste i większe od 2 (lub równe 2).

Zadanie 4 (SP – etap powiatowy)

a) Wykaż, że liczba $\frac{8+8^2+8^3+\cdots+8^{300}}{57}$ jest liczbą naturalną. Zapisz obliczenia.

b) Rozwiąż równanie $(2x+8^{2021})^2-(2x-8^{2021})^2=8^{2022}$

W tym zadaniu w części (b) do rozwiązania równania należało wykorzystać wzory skróconego mnożenia na kwadrat sumy i kwadrat różnicy. Ostatecznie po przekształceniach otrzymywano równanie $8x\cdot 8^{2021}=8^{2022}$, którego rozwiązaniem było $x = 1$.

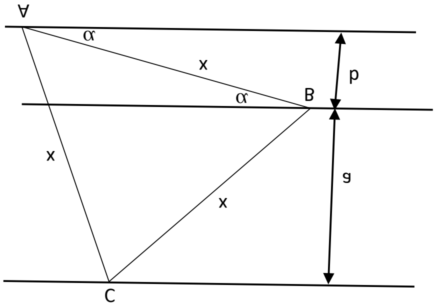
Problemem dla części uczniów było podnoszenie potęgi do potęgi i zmiana znaków przy opuszczaniu nawiasów.

Zadanie 5 (PP/PG– etap powiatowy)

a) Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości x. Przez każdy z wierzchołków trójkąta poprowadzono proste równoległe do siebie. Prosta przechodząca przez wierzchołek A tworzy z bokiem trójkąta kąt α. Odległości między prostymi równoległymi są równe odpowiednio a i b. Wyznacz długość boku tego trójkąta – uzależnij je od wielkości a i b.

b) Na trójkącie tym opisano okrąg. Oblicz pole tego trójkąta oraz pole koła ograniczonego tym okręgiem.

W części (a) należało sporządzić odpowiedni rysunek i znaleźć zależności boku trójkąta równobocznego ABC o długości x od odległości a oraz b między prostymi równoległymi. Należało uwzględnić np. funkcje trygonometryczne dla kąta α.



W wyniku tej analizy można było otrzymać np. poniższy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{a}{x}=sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) \\ \frac{b}{x}=sin\alpha \\ \frac{a+b}{x}=sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) \end{cases}$$

Wystarczyło drugie równanie podnieść do kwadratu i zastosować wzór na tzw. jedynkę trygonometryczną. Po nieco dłuższych przekształceniach i podstawieniach oraz zastosowaniu wzorów trygonometrycznych otrzymujemy, że długość boku trójkąta równobocznego ABC jest równa: $x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{a^2+ab+b^2}$. I tu zasadniczo kończą się problemy ucznia, bo mając informację o boku x trójkąta równobocznego ABC, bez problemu można było obliczyć pole trójkąta oraz pole koła, ograniczonego okręgiem opisanym na tym trójkącie.

Problemem dla uczniów było zauważenie i zapisanie zależności, odpowiadających kątom w trójkącie prostokątnym, które to trójkąty trzeba było jakby „stworzyć” niezależnie od wykreślonego rysunku. Kolejnym krokiem było podjęcie decyzji, od czego zacząć.

Etap wojewódzki – zadania

W tegorocznej edycji PLZ *Zdolni z Pomorza* etap wojewódzki przeprowadzony został w formie stacjonarnej. Najlepsi uczniowie, którzy zostali zakwalifikowani z etapu powiatowego do wojewódzkiego finału konkursu, mogli wykazać się, w jakim stopniu nastąpił ich rozwój w zakresie matematyki. Można rzec, że **etap wojewódzki był etapem prawdy**.

Poniższa tabela pokazuje, które z zadań były łatwiejsze, a których zadań nie wszyscy uczniowie podjęli się rozwiązywać.

Tabela 2. Dane dotyczące uczniów klasy 7 i 8 szkoły podstawowej oraz uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych [PLZ 2021/2022 – etap wojewódzki]

	Zadanie 1	Zadanie 2	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5
Szkoła Podstawowa (klasy 7 i 8) Piszących na etapie wojewódzkim – 29 uczniów	25 1) 0,50 2) 0,58 3)	27 1) 0,34 2) 0,37 3)	28 1) 0,76 2) 0,79 3)	27 1) 0,28 2) 0,30 3)	23 1) 0,09 2) 0,12 3)
Szkoła ponadpodstawowa i ponadgimnazjalna Piszących na etapie wojewódzkim – 22	20 1) 0,34 2) 0,37 3)	18 1) 0,18 2) 0,22 3)	22 1) 0,61 2) 0,61 3)	22 1) 0,60 2) 0,60 3)	22 1) 0,20 2) 0,20 3)

Legenda: 1) – liczba uczniów, którzy podjęli się rozwiązania tego zadania; 2) – wskaźnik łatwości zadania w odniesieniu do wszystkich piszących; 3) – wskaźnik łatwości zadania tylko w odniesieniu do uczniów, którzy podjęli się rozwiazywania tego zadania.

Jak wynika z analizy wskaźnika łatwości zadań na etapie wojewódzkim (Tabela 2), to jako trudne okazały się następujące zadania:

- dla uczniów szkół podstawowych – zadanie 2 (wskaźnik łatwości 0,34), zadanie 4 (wskaźnik łatwości 0,28) i zadanie 5 (wskaźnik łatwości 0,09);
- dla uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych – zadanie 1 (wskaźnik łatwości 0,34), zadanie 2 (wskaźnik łatwości 0,18) i zadanie 5 (wskaźnik łatwości 0,20).

Niestety, etap wojewódzki w sposób wręcz „namacalnie dosadny" unaocznił, jak **zawiodła intuicja i praktyczne spojrzenie na dany problem.**

Zgodnie z tym, co wcześniej zostało powiedziane, **przedyskutujemy przykładowe rozwiązania zadań, które nie powinny sprawić kłopotów uczniom**.

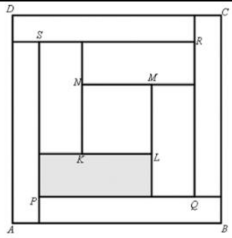
Zadanie 1 (SP – etap wojewódzki)
W zakładzie produkującym kule do gier automatycznych uruchomione są specjalne wirówki, których zadaniem jest odrzucenie wadliwych kul. Są 2 typy wirówek – 40 wirówek wolniejszych, 30 wirówek szybszych. Na początku przed uruchomieniem wirówek w każdej z nich znajduje się po 200 kul. Statystycznie w ciągu minuty wirówka wykrywa i odrzuca na zewnątrz 1 kulę, a do wirówki automatycznie podawana jest kolejna porcja kul, aż ostatecznie w wirówce będzie 500 kul. Wtedy wirówka zatrzymuje się. 40 wolniejszych wirówek pobiera każdorazowo co minutę po 3 kule, 30 szybszych – co minutę po 4 kule. Po ilu minutach wszystkie wirówki przestaną wirować (zatrzymają się)? Ile wadliwych kul zostało odrzuconych? Ile kul zostało sprawdzonych?

Rozumujemy intuicyjnie! Mamy wirówki, w których na początku było po 200 kul. W trakcie wirowania wirówki miały się dopełnić się do 500 kul, czyli do każdej miało przybyć po 300 kul. Co minutę do każdej wirówki dostarczana jest ta sama porcja kul (3 lub 4 kule – w zależności od typu wirówki). Przy czym STATYSTYCZNIE co minutę z każdej wirówki odrzucona jest 1 kula wadliwa. Zauważamy, że sytuacja jest dynamiczna i co minutę się zmienia – w wirówkach wolniejszych co minutę przybywają 3 kule, 1 z nich jako wadliwa zostaje odrzucona, czyli praktycznie w wirówce zostają 2 kule; w wirówkach szybszych co minutę przybywają 4 kule i po odrzuceniu 1 wadliwej w wirówce szybszej pozostają 3 kule. Tak więc na zapełnienie wirówki wolniejszej potrzeba 300:2 = 150 minut, a na zapełnienie wirówki szybszej potrzeba 300:3 = 100 minut. Proces wirowania rozpoczyna się dla wszystkich wirówek jednocześnie i trwa dopóki nie zapełnią się wirówki wolniejsze, czyli 150 minut.

Na podstawie wielu rozwiązań tego zadania można wywnioskować, że nie zawsze uczniowie rozumieją pojęcie STATYSTYCZNIE (czyli nie jest ważne, czy wirówka za kolejnym razem wyrzuci 1 kulę czy 2 lub wcale, ale z treści zadania wynika STATYSTYCZNIE, że co minutę każda wirówka wyrzuca 1 kulę wadliwą, czyli ile minut pracuje wirówka, tyle wyrzuci kul).

9 uczniów (na 29 piszących) uzyskało 8-10 punktów za rozwiązanie tego zadania. Natomiast spośród nich nie wszyscy poprawnie odpowiedzieli na pytanie, ile kul zostało sprawdzonych – uwzględnili w swoich rozważaniach tylko te kule, które były dostarczane do wirówek w czasie procesu wirowania, a pominęli te kule, które znajdowały się w wirówkach przed rozpoczęciem wirowania.

Zadanie 4 (SP – etap wojewódzki)
Kwadrat ABCD o boku długości 9 podzielono na mniejszy kwadrat KLMN i dwie czwórki przystających prostokątów (rysunek obok). Każda część ma takie samo pole. Oblicz długości boków prostokątów. Oblicz obwód zacieniowanego prostokąta.



Przy dobrym wczytaniu się w treść zadania łatwo zauważyć, że pole kwadratu ABCD jest równe 81 j.kw., czyli że każdy z prostokątów i mniejszy kwadrat mają pole równe 9 j.kw. Stąd wniosek, że długość boku małego kwadratu KLMN jest równa 3 j.dł.

Dalsze rozwiązanie zależało od tego, co zauważył uczeń. Zamalowany prostokąt, przylegający do kwadratu KLMN i pozostałe 3 przylegające do kwadratu są przystające i mają równe pola oraz boki o długościach x oraz $x + 3$. Pole każdego z tych prostokątów jest równe $x(x + 3) = 9$. To prowadziło do rozwiązania równań kwadratowych. Podobne rozważania dotyczyły 4 zewnętrznych prostokątów. W wielu rozwiązaniach równania kwadratowego nie podano uzasadnienia, dlaczego jedno z rozwiązań zostało odrzucone. Można też było nie korzystać z równań kwadratowych. Skoro wiemy, że boki zamalowanego prostokąta mają długość x oraz $x + 3$, boki kwadratu PQRS mają długość $3 + 2x$, a jego pole jest równe 45 j.kw. (bo każdy prostokąt i kwadrat, znajdujące się we wnętrzu PQRS, ma pole równe 9 j.kw.). Czyli że bok PQ tego kwadratu ma: $3 + 2x = \sqrt{45}$. Wyliczamy wartość x i bez problemu możemy obliczyć długości boków zamalowanego prostokąta i jego obwód. Kolejnym krokiem było wyliczenie długości boków zewnętrznych prostokątów (tych cieńszych a dłuższych) – jego boki mają długość y oraz $y + 2x + 3$, a jego pole jest równe 9 j.kw. Mając wartość x, wyliczamy wartość y, a stąd tylko jeden krok do wyznaczenia długości boków zewnętrznych prostokątów.

Tylko 4 uczniów (na 29 piszących) uzyskało maksymalny wynik 10 punktów.

Zadanie 1 (PP/PG– etap wojewódzki)
Dane są 3 proste – prosta *k*: $y = -x + 9$, prosta *m*: $x = 2$ i prosta *n*: $y = 2$. Prosta *m* przecina prostą *k* w punkcie $(x_1; y_1)$, a prosta *n* przecina prostą *k* w punkcie $(x_2; y_2)$ Współrzędne tych punktów tworzą dwie skrajne liczby postaci $\overline{xy}$, gdzie $\overline{xy}$ jest liczbą dwucyfrową, w której x jest cyfrą dziesiątek, a y cyfrą jedności. Między tymi liczbami znajduje się ciąg kolejnych naturalnych. Na bazie tego ciągu tworzymy kolejny ciąg liczb trzycyfrowych w ten sposób, że do wyżej wymienionych liczb dopisujemy na końcu jedną cyfrę, aby suma tych trzech cyfr była równa 9.
Spośród tak powstałych liczb losujemy 3 liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, w których cyfry nie powtarzają się.

Zdawałoby się, że zadanie jest standardowe w swojej treści. Rozwiązanie układów równań nie sprawiło problemów – wyliczone skrajne liczby to 27 i 72. Punktem wyjściowym do dalszych rozważań był ciąg liczb naturalnych: 27, 28, 29, 30, 31, … itd. … 67, 68, 69, 70, 71, 72. Do tych liczb należało dopisać na końcu jedną cyfrę taką, aby suma cyfr nowopowstałej liczby trzycyfrowej była równa 9. Nie było to możliwe w odniesieniu do każdej liczby z pierwotnego ciągu. Tak utworzonych liczb trzycyfrowych było tylko 26 – przestrzeń zdarzeń Ω liczyła więc 26 zdarzeń elementarnych. Doświadczenie losowe polegało na wylosowaniu spośród 26 danych liczb 3 liczb, spełniających pewien warunek (cyfry miały nie powtarzać się). Tak więc zdarzeniem oczekiwanym A było, aby w wylosowanych liczbach cyfry nie powtarzały się – zdarzeniu temu sprzyjało 21 zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{133}{260}$.

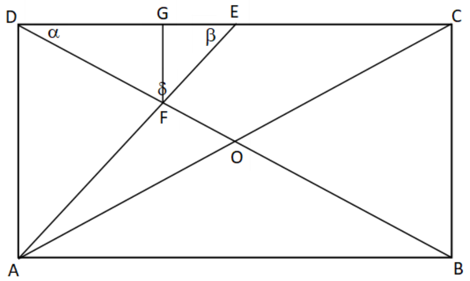
Nikt nie wymagał od uczniów znajomości symbolu Newtona i wzoru. Można było problem z zadania przedstawić w postaci „drzewka” i wyliczyć prawdopodobieństwo. Wystarczyło też podejść do problemu klasycznie – wśród 26 liczb mamy 21 sprzyjających zdarzeniu A, więc prawdopodobieństwo wylosowania pierwszej liczby jest równe $\frac{21}{26}$. Kolejny ruch – wśród 25 pozostałych liczb mamy już tylko 20 liczb sprzyjających zdarzeniu, więc prawdopodobieństwo wylosowania drugiej jest równe $\frac{20}{25}$. Ostatni krok – wśród 24 pozostałych liczb mamy już tylko 19 liczb sprzyjających zdarzeniu, więc prawdopodobieństwo wylosowania trzeciej jest równe $\frac{19}{24}$. Stosując regułę mnożenia, mamy ostatecznie, że $P(A) = \frac{21}{26} \cdot \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} = \frac{133}{260}$

Tylko 2 uczniów (na 22 piszących) za rozwiązanie tego zadania otrzymało 10 i 8 punktów. W nielicznych rozwiązaniach uczniowie nie uwzględnili wyrazów skrajnych ciągu liczbowego, więc w ich ujęciu losowano 3 liczby spośród 24 liczb (sprzyjających liczb więc było 19) – uwzględniono to w punktacji, tyle tylko, że i tak prawdopodobieństwo zdarzenia było błędnie przez nich policzone.

Od momentu rozwiązania układu równań i ustalenia, ze skrajnymi liczbami są 27 i 72, uczniowie przedstawili tak różne rozwiązania, z których wynikało, że nie do końca zrozumieli, na czym polegało tworzenie ciągu liczb i doświadczenie losowe. Spora grupa uczniów przyjęła, że ciąg tworzą liczby naturalne od 270 do 720, spośród których wybierano liczby o niepowtarzających się cyfrach. Wtedy wyliczano prawdopodobieństwo: $P(A) = \frac{ileś\ tam}{451}$. Inna grupa uczniów poprawnie ustaliła zbiory Ω i A, ale w dalszej części zadania analizowała doświadczenie losowe, jakby polegało ono na wylosowaniu jednej liczby. Stąd np. takie błędne obliczenia prawdopodobieństwa, jak: $P(A) = \frac{21}{26}$ czy $P(A) = \frac{19}{24}$ (jeśli nie uwzględniono skrajnych liczb ciągu).

Zadanie 3 (PP/PG– etap wojewódzki) Dany jest prostokąt ABCD, w którym $\|AB\|:\|AD\| = 2:1$. W prostokącie tym punkt E jest środkiem boku CD. Proste BD i AE przecinają się w punkcie F. a) Oblicz tangensy kątów trójkąta DEF. b) Jaką część pola prostokąta ABCD stanowi pole trójkąta DEF?

Do analizy zadania potrzebny jest rysunek, jak poniżej.



W części (a) zadania bez problemu można było obliczyć tangensy 2 kątów w trójkącie DEF. Z tekstu zadania wynika, że $|DC| = 2 \cdot |AD|$ czyli $|AD| = |DE|$. Tak więc trójkąt ADE jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, a wtedy kąt β = 45° (tg β = 1). Z kolei w trójkącie BCD możemy wyliczyć $tg\alpha = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{1}{2}$. Większym problemem było obliczenie wartości tangensa kąta δ. Wielu uczniów zrezygnowało z tego.

Natomiast w części (b) zadania należało np. zauważyć podobieństwo trójkątów DEF i ABF o skali ½. A to by świadczyło, że punkt F dzieli odcinki BD i AE w stosunku 1:2, licząc odpowiednio od punktów D i E. Dalsze obliczenia dają ostateczną odpowiedź, że $P_{DEF} = \frac{1}{12} \cdot P_{ABCD}$.

To oczywiście tylko jeden ze sposobów rozwiązania tej części zadania. Można było np. umieścić prostokąt w układzie współrzędnych, gdzie punkt A znajdowałby się w początku układu współrzędnych, a boki AB i AD prostokąta ABCD leżałyby na osiach współrzędnych O*x* i O*y*.

Tylko 3 uczniów (na 22 piszących) uzyskało maksymalne 10 punktów. Ale kolejnych 8 uczniów uzyskało 7 lub 8 punktów za rozwiązanie tego zadania (najczęściej albo zrezygnowali z obliczenia tangensa kąta δ, albo popełnili też błędy rachunkowe).

Powyżej omówiłem zadania o trochę nietypowej treści, które wymagały wyłącznie praktycznego podejścia do ich rozwiązania. Co nie zawsze uczniowie potrafili dostrzec.

Trzeba natomiast przyznać, że zadania o charakterze „standardowym" (szkolne) nie sprawiły uczniom kłopotów. Poniżej omówiono dwa przykładowe.

Zadanie 3 dla SP dotyczyło akwarium o wymiarach 0,6 m, 30 cm i 4 dm, częściowo napełnionego wodą. Do akwarium należało wpuścić tyle rybek, aby poziom wody nie przekroczył 11/12 wysokości akwarium. Uczniowie z łatwością zauważyli, że w zadaniu nie jest określone, które wymiary oznaczają dno akwarium i dlatego rozpatrywali 3 różne przypadki w zależności od wymiarów i w konsekwencji przedstawili 3 możliwe rozwiązania tego problemu zawartego w zadaniu. 14 uczniów (na 29 piszących) uzyskało maksymalny wynik 10 punktów za zadanie.

Z kolei **w zadaniu 4 dla PP** należało rozwiązać rozbudowaną nierówność podwójną:

$0{,}125 \cdot \left(sin\frac{\pi}{6}\right)^{3-x} \cdot \left(cos\frac{\pi}{3}\right)^{-2(8-x)} < \frac{2^{x^2}}{2^{x \cdot log_3 81}} < k$,

gdzie $k = \frac{2+2^3+2^5+2^7+\ldots+2^{2017}+2^{2019}+2^{2021}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\ldots+\frac{1}{2^{2017}}+\frac{1}{2^{2019}}+\frac{1}{2^{2021}}}$

w którym wartość k podano w postaci ułamka, zawierającego w liczniku i w mianowniku sumy potęg liczby 2. Należało więc wykorzystać wiedzę dotyczącą potęg, ciągów geometrycznych, funkcji trygonometrycznych, logarytmów. Bez większych trudności uczniowie przeprowadzili przekształcenia, które doprowadziły do podwójnej nierówności wykładniczej, a następnie podwójnej nierówności jednej zmiennej: $-6 + x + 2(8 - x) < x^2 - 4x < 2022$. Pewne problemy sprawiło policzenie wyrazów obu ciągów geometrycznych występujących w zadaniu (2021 czy 2022 wyrazy), ale w rezultacie nie miało to większego wpływu na końcowy wynik zadania. 9 uczniów (na 22 piszących) uzyskało 8-10 punktów za zadanie.

Wielu **uczniom zabrakło wyobraźni przestrzennej**, co było widać **w zadaniu nr 2 dla PP** – dany był ostrosłup prawidłowy trójkątny, w który wpisano walec. Problemem było np. przedstawienie informacji zawartych w zadaniu w formie przekroju obu brył. Z rysunków uczniowskich wynikało, że wielu nie zauważyło, że walec wpisany w ostrosłup jest styczny swoją podstawą górną do ścian bocznych ostrosłupa (punkt styczności leżał na wysokości każdej ściany), ale że jest też oddalony od krawędzi bocznej ostrosłupa. Podstawa górna walca (czyli koło) była wpisana w trójkąt równoboczny, leżący w tej samej płaszczyźnie, co ta podstawa – tak więc koło było styczne do boków tego przekroju (trójkąta równobocznego) w punktach, przez które przechodzą wysokości ścian bocznych ostrosłupa. W zadaniu tym można było pominąć informację, że przekrój walca jest kwadratem o polu równym P. Wystarczyło ułatwić sobie tę informację i przyjąć, że wysokość h walca jest równa długości średnicy podstawy $2r$. Poza tym w zadaniu pewnym „ułatwieniem” dla wyobraźni przestrzennej uczniów była informacja, że środek kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym leży na wysokości tego ostrosłupa.

Trudnym na obu poziomach było zadanie 5 – o funkcji różnicującej uczniów.

Zadanie 5 (SP – etap wojewódzki)

a) Dana jest liczba $11^{64} - 1$. Wykaż, że ta liczba jest podzielna przez 960.

b) Dana jest liczba $11^n - 1$, gdzie $n \in N$. Dla jakiej wartości n liczba ta będzie podzielna przez 1024?

Zadanie 5 (PP/PG– etap wojewódzki)

a) Dane jest wyrażenie $a = \frac{x^4 - y^4}{x^2 y^2 \sqrt{xy+2}}$, gdzie $x, y \in C$ (x,y są liczbami całkowitymi).
Podaj przykłady, dla jakich wartości iloczynu liczb x i y wyrażenie to jest liczbą wymierną.
Spróbuj uogólnić, czyli wyrazić to za pomocą wzoru.

b) Dane są liczby x, y, które spełniają warunek $x^7 + y^7 = x^3 y^3$.
Wykaż, że $1 - 4xy$ jest kwadratem liczby wymiernej. Podaj warunek, kiedy to zachodzi.

Z zadaniami tymi mogli zmierzyć się nieliczni uczniowie. Jednak w części pierwszej każdego z tych zadań wystarczyło skorzystać z typowo szkolnych wiadomości (zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, wartość liczby podpierwiastkowej i wartość pierwiastka stopnia drugiego), jak też praktycznie (często intuicyjnie) podejść do zagadnienia. Warto więc, aby uczniowie wspólnie z nauczycielami przeanalizowali jeszcze raz choćby tę pierwszą część zadania nr 5.

Zadania własne uczniów – propozycje

Zakres tematyczny zadań własnych obejmował: (1) „praktyczne zastosowanie matematyki”, (2) geometrię wielokątów, (3) geometrię przestrzenną.

Do analizy wszystkich zadań zastosowano jednakowe kryteria oceny, podane na stronie internetowej konkursu PLZ – można było uzyskać maksymalnie 10 punktów. Kryteria były tak dobrane, aby zapewniona była porównywalność zadań, bez względu na ich problematykę i stopień trudności. Tak więc w odniesieniu do tych zadań brano pod uwagę: (1) zgodność z wykazem tematyki, zaproponowanym w tym roku szkolnym [1p.], (2) ciekawa treść zadania [1p.], (3) jasne i kompletnie przedstawione rozwiązanie [2p.], (4) zaproponowane co najmniej dwa różne sposoby rozwiązania [2p.], (5) oryginalne, pomysłowe rozwiązanie [2p.], (6) zadanie kilkuetapowe [1p.], (7) forma edytorska [1p.].

Tabela 3. Dane dotyczące uczniów klasy 7 i 8 szkoły podstawowej oraz uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych [zadania własne – PLZ 2021-2022 etap wojewódzki]

	Liczba punktów (%)			Typ zadania		
Liczba nadesłanych zadań	Za mniej niż 60% punktów	Za 60-80% punktów	Za więcej niż 80% punktów	Zadanie „szkolne”	Co najmniej 2 sposoby rozwiązania	Zadanie kilku-etapowe
klasy 7 i 8 SP Liczba nadesłanych zadań – 21	11	8	2	7	16	10
PP/PG Liczba nadesłanych zadań – 15	2	13	0	0	11	1

Tylko 11 zadań (na 36 nadesłanych) miało charakter praktyczny. Na ich przykładzie można było zorientować się co do różnorodności pomysłów i wyobraźni uczniów, którzy do rozwiązania takich zadań wykorzystywali swoją szkolną wiedzę z geometrii płaskiej i przestrzennej. Dotyczyły one m.in.: podziału i zagospodarowania działek, remontów mieszkań, rozmieszczenia mieszkań w budynku, pakowania bombek do pudełek w kształcie piramidek itp. Pozostałe zadania dotyczyły wielokątów, kół i brył.

Spośród nadesłanych zadań wiele było oryginalnych i wykraczało poza program szkolny.

Podsumowanie

Tegoroczny konkurs PLZ był mało litościwy na etapie szkolnym – znalazły się w nim zadania, które wymagały mało szkolnego podejścia do problemu i to spowodowało tak duże zróżnicowanie punktowe wśród uczniów. Jednocześnie tegoroczny etap wojewódzki Pomorskiej Ligi Zadaniowej *Zdolni z Pomorza* pokazał, jak mocno **szkolna wiedza matematyczna „przytłoczyła" myślenie intuicyjne i praktyczne podejście do problemów**, przedstawionych w zadaniach. Ku zaskoczeniu, łatwiejsze zadania, które powinny dać się rozwiązać „na piechotę", przysporzyły trochę kłopotów. Ale też w tych najtrudniejszych zadaniach jakby zabrakło uczniom intuicji i pomysłów. Gratuluję wszystkim uczestnikom tegorocznych zmagań matematycznych na wszystkich etapach Pomorskiej Ligi Zadaniowej. Dziękuję za podjęcie próby zmierzenia się z problemami matematycznymi. W szczególności dziękuję za arcyciekawe i pomysłowe zadania własne. Gratuluję nauczycielom-opiekunom, którzy mobilizowali uczniów i niejednokrotnie wspierali swych podopiecznych w ich rozwoju, służąc im radą, wskazówkami i pomocą.

Jerzy Paczkowski
Ekspert Pomorskiej Ligi Zadaniowej *Zdolni z Pomorza* w zakresie matematyki. Nauczyciel dyplomowany, doradca metodyczny z matematyki, a następnie konsultant ODN ds. diagnozy i edukacji matematycznej w latach 1993-2018. Nauczyciel matematyki w szkole podstawowej i w szkole średniej. Egzaminator egzaminów maturalnych i gimnazjalnych z matematyki. Członek Polskiego Towarzystwa Diagnostyki Edukacyjnej.