POMORSKA LIGA ZADANIOWA *ZDOLNI Z POMORZA*

Konkurs dla uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych województwa pomorskiego w roku szkolnym 2019/2020

Etap II – powiatowy

Przedmiot: MATEMATYKA

Instrukcja dla ucznia

Zanim przystąpisz do rozwiązywania testu, przeczytaj uważnie poniższą instrukcję.

1. Arkusz testowy zawiera **5** zadań.
2. Za zadania z arkusza można uzyskać łącznie 50 punktów.
3. Pisz czytelnie. Rozwiązania zadań przedstaw w takiej formie, żeby można było odczytać je bez problemu.
4. Wszystkie rozwiązania zadań zamieść w jednym pliku o nazwie imię_nazwisko_miejscowość (w formacie *.doc, *.docx, *.pdf) i prześlij na adres mailowy: matematyka_plz_Pp@odn.slupsk.pl. Pliki w postaci zdjęć nie będą uwzględniane.

Życzymy powodzenia!

Zadanie 1. (0-10p.)

W prostokątnym układzie współrzędnych dane jest koło, styczne do części dodatnich obu osi układu, a jego środek przynależy do prostej $y = 2$. Z kolei w to koło wpisany jest sześciokąt foremny, którego jedna z dłuższych przekątnych jest równoległa do osi OX układu współrzędnych. Poprowadzono prostą, styczną do koła, nie pokrywającą się z osiami układu, która przecina dodatnie części osi układu. Punkt styczności jest jednocześnie wierzchołkiem sześciokąta foremnego, bardziej oddalonym od początku układu współrzędnych. W ten sposób styczna i osie układu współrzędnych utworzyły trójkąt prostokątny AOB. Trójkąt wraz z kołem i sześciokątem przesunięto wzdłuż osi OY w ten sposób, że jeden z boków sześciokąta pokrył się z osią OX. Prosta i osie układu współrzędnych utworzyły nowy trójkąt A_1OB_1. O ile zmniejszyło się pole trójkąta AOB? Rozpatrz dwa przypadki. Przedstaw obliczenia.

Zadanie 2. (0-10p.)

Cztery statki A, B, C i D oczekujące na wejście do portu ustawione są współliniowo w tej właśnie kolejności, przy czym odległości pomiędzy nimi wynoszą: $|AB| = a - b$ [km], $|BC| = c - b$ [km], $|CD| = b + c$ [km], gdzie a, b i c są dodatnimi rozwiązaniami układu równań:

$$\begin{cases} ab = a + b + 1 \\ bc = b + c + 2 \\ ac = a + c + 5 \end{cases}$$

Rozstrzygnij, czy istnieje taki punkt P na lądzie, że: $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD$.
Przedstaw tok swojego rozumowania i obliczenia.

Zadanie 3. (0-10p.)

Spośród wszystkich liczb ośmiocyfrowych losujemy takie liczby, w zapisie których nie występuje zero, natomiast cyfra 2 występuje dwa razy, a cyfra 3 występuje trzy razy. Natomiast spośród wszystkich sześciocyfrowych liczb nieparzystych wybieramy takie, w których suma dwóch skrajnych cyfr jest parzysta i mniejsza od 10, a wśród cyfr tej liczby są co najwyżej 3 siódemki. Wykaż, że prawdopodobieństwo wylosowania liczby ośmiocyfrowej jest mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania liczby sześciocyfrowej. Przedstaw tok swojego rozumowania i obliczenia.

Zadanie 4. (0-10p.)

Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które przy dzieleniu przez jedenaście są równe sumie kwadratów swoich cyfr. Przedstaw swój tok rozumowania i obliczenia.

Zadanie 5. (0-10p.)

W stożek, w którym długość promienia podstawy jest równa 5, a długość wysokości jest równa 12, wpisano kulę. Następnie między kulą a podstawą stożka umieszczono identyczne mniejsze kule o maksymalnej wielkości. Ile takich kulek tam umieszczono? Przedstaw tok swojego rozumowania i obliczenia.